

4. Aplicaciones de las ecuaciones básicas

En este capítulo nos detendremos a estudiar aplicaciones de las ecuaciones de momento y continuidad desarrolladas en el capítulo anterior. Para ello utilizaremos diferentes sistemas de coordenadas.

4.1 Presión como coordenada vertical

De la ecuación hidrostática queda claro que existe una relación monótonica entre la altura y la presión. Por lo tanto, es posible escribir las ecuaciones de conservación en coordenadas (x,y,p).

4.1.1 Ecuación de momento

La ecuación de momento horizontal en coordenadas de altura, en ausencia de fricción y despreciando los términos de esfericidad, es

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f\hat{k} \times \vec{V}.$$

Para escribir esta ecuación en coordenadas isobáricas debemos convertir la fuerza del gradiente de presión en forma equivalente usando el nuevo sistema de coordenadas. Consideremos el diferencial de presión $(dp)_p$ en una superficie isobárica. Como por definición $(dp)_p=0$ en esta superficie, se puede escribir

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} dx_p + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} dy_p + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} dz_p.$$

Luego expandimos dz_p en función de x e y

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} dx_p + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} dy_p + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} dx_p + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y,p} dy_p \right]$$

$$0 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y,z} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p} \right] dx_p + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x,z} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y,p} \right] dy_p$$

Como esta expresión es válida para todo dx_p , dy_p , vale

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y,z} = - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x,z} = - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y,p}$$

Usando la ecuación hidrostática y dividiendo entre la densidad

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_p$$

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = -g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_p$$

(por conveniencia se quitaron los subíndices x , y a la izquierda de la ecuación). Por lo tanto la expresión de la fuerza gradiente de presión en coordenadas isobáricas es

$$PGF_p = -\nabla_p \phi$$

$$\nabla_p = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j}$$

Notar que la expresión para la fuerza del gradiente de presión no hace referencia a la

densidad lo cual facilita su cálculo operacional y motiva el uso del sistema isobárico.

Entonces, la ecuación de conservación de momento en el sistema isobárico queda

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla_p \phi - f\hat{k} \times \vec{V}$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

La velocidad vertical es

$$\omega = \frac{dp}{dt}$$

y se mide en hPa/s.

Notar que las relaciones entre derivadas a presión y altura constante, por ejemplo $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p$, cumplen que una alta presión en una superficie de nivel aparece como una alta en el geopotencial en una superficie isobárica (Figura 4.1).

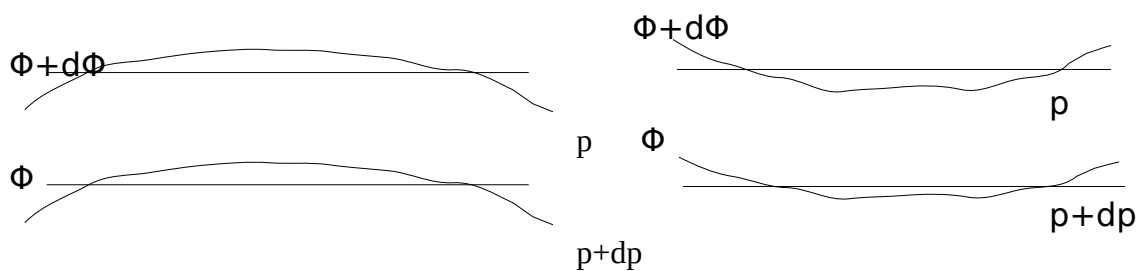


Figura 4.1 – Representación de una región de alta presión en el plano x,z ó x,Φ (izquierda). Misma situación representada en el plano x,p.

En el sistema de coordenadas isobárico el balance geostrófico queda de la forma

$$\vec{V}_g = \frac{k}{f} \times \nabla_P \phi$$

que, dado que no hace referencia a la densidad, resulta más apropiado para ser usada operacionalmente pues un gradiente de geopotencial dado implica el mismo viento geostrófico independientemente del nivel de presión considerado. El viento geostrófico es paralelo a líneas de geopotencial y su magnitud depende del gradiente horizontal (figura 4.2). Como vimos anteriormente el viento geostrófico es muy cercano al viento real excepto en zonas de gran curvatura y de máximos de velocidad.

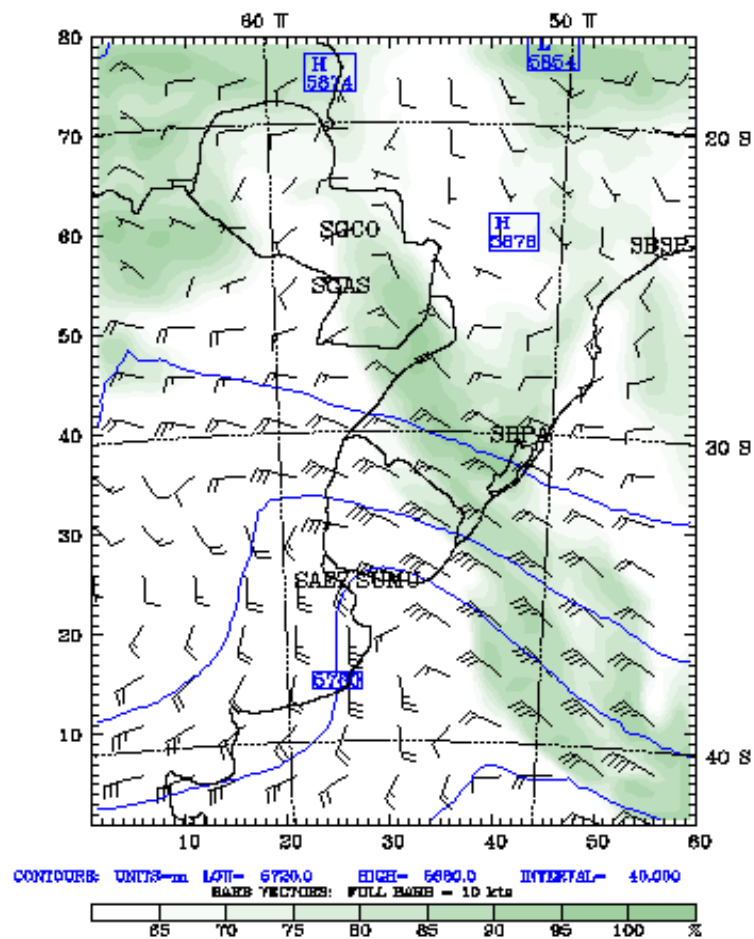


Figura 4.2 – Alturas de geopotencial y vientos en 500 hPa.

Si f se puede considerar constante, vale

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{V}_g &= \nabla \cdot \left(\frac{\hat{k}}{f} \times \nabla_p \phi \right) \\ &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{i} + \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{j} \right) \\ &= \frac{1}{f} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{f} \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) = 0\end{aligned}$$

o sea que el viento geostrófico es no-divergente.

4.1.2 Ecuación de continuidad

En lugar de transformar la ecuación de continuidad de coordenadas de altura a coordenadas de presión, derivaremos la forma isobárica considerando un volumen de control $\delta V = \delta x \delta y \delta z$. Usando la ecuación hidrostática

$$\delta V = \frac{-\delta x \delta y \delta p}{\rho g}$$

Si nos movemos con el elemento de volumen la masa no cambia en el tiempo. Por lo tanto

$$\frac{1}{\delta M} \frac{d(\delta M)}{dt} = 0 = \frac{-g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt} \left(\frac{-\delta x \delta y \delta p}{g} \right)$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{1}{\delta x \delta y \delta p} \left[\frac{d(\delta x)}{dt} \delta y \delta p + \frac{d(\delta y)}{dt} \delta x \delta p + \frac{d(\delta p)}{dt} \delta x \delta y \right] = 0.$$

y como

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \delta u, \quad \frac{d(\delta y)}{dt} = \delta v, \quad \text{and} \quad \frac{d(\delta p)}{dt} = \delta \omega,$$

la ecuación queda de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

tomando el límite de $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$. Notar que la densidad no aparece y no hay derivadas temporales, lo cual representa una de las mayores ventajas del sistema de coordenadas isobárico. Esta ecuación se puede escribir como

$$\nabla \cdot \vec{V}_h = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

que relaciona la divergencia horizontal en una superficie isobárica con el movimiento vertical (ω).

La ecuación anterior indica que si conocemos la distribución vertical de la divergencia horizontal en la columna es posible determinar el movimiento vertical. Considere la situación hipotética mostrada en la figura 4.3 en la cual existe convergencia horizontal cerca de la superficie $\nabla \cdot \vec{V}_h < 0$ y divergencia horizontal en el tope de la columna $\nabla \cdot \vec{V}_h > 0$. Por continuidad debe existir un movimiento vertical en la columna. Integrando la ecuación de continuidad con respecto a la presión se obtiene

$$(\nabla \cdot \vec{V}_h)_{p_t} - (\nabla \cdot \vec{V}_h)_{p_s} = -[\omega_{p_t} - \omega_{p_s}].$$

Como no puede haber movimiento vertical en la superficie (en ausencia de montañas), $\omega_{p_s} = 0$. El término de la izquierda es positivo por lo que $\omega_{p_t} < 0$, o sea ascenso de aire.

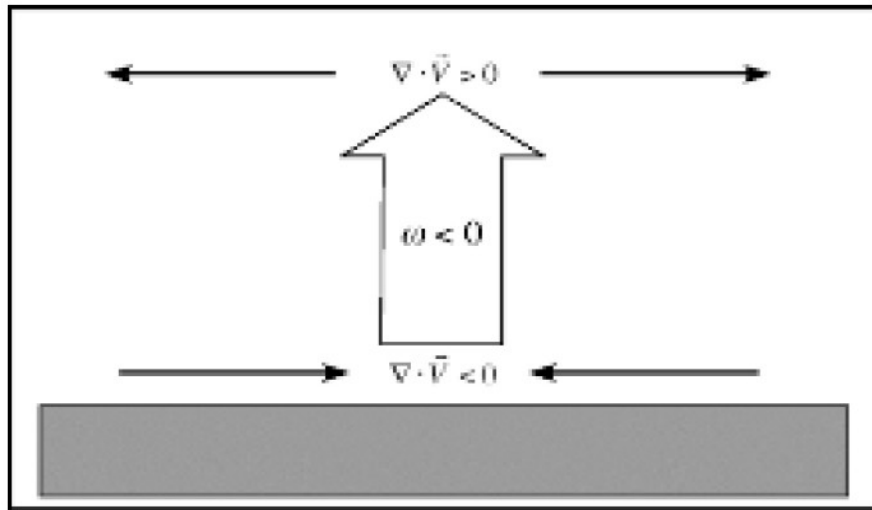


Figura 4.3 – Ilustración de distribución de divergencia horizontal y movimiento ascendente en la columna.

Es posible mostrar que la distribución de movimiento ascendente es debido a la divergencia del viento ageostrófico. Para ello consideremos el viento total como la suma de las componentes geostrófica y ageostrófica $\vec{V}_h = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$. Entonces

$$\nabla \cdot \vec{V}_h = \nabla \cdot (\vec{V}_g + \vec{V}_{ag}) = \nabla \cdot \vec{V}_g + \nabla \cdot \vec{V}_{ag} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}.$$

Si f es constante la divergencia del flujo geostrófico es nula y obtenemos

$$\nabla \cdot \vec{V}_{ag} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Por lo tanto, el viento ageostrófico es enteramente responsable de la distribución de ciclones, anticiclones, nubes y lluvia. O sea que a pesar de que la atmósfera en latitudes medias está fundamentalmente en balance geostrófico el tiempo es el resultado de la pequeña componente ageostrófica del viento.

4.1.3 Ecuación termodinámica

Tomando la derivada total de la ecuación de estado

$$p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} = R \frac{dT}{dt}$$

y usando $c_p - c_v = R$, es posible escribir la 1ª ley de la termodinámica en coordenadas isobáricas como

$$c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right) - \alpha \omega = \dot{Q}.$$

Reformulando la ecuación y dividiendo entre c_p se obtiene

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left(\frac{\alpha}{c_p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) \omega = \frac{\dot{Q}}{C_p}$$

lo cual puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \sigma_p \omega = \frac{\dot{Q}}{C_p}$$

donde

$$\sigma_p = \left(\frac{\alpha}{c_p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right)$$

ó

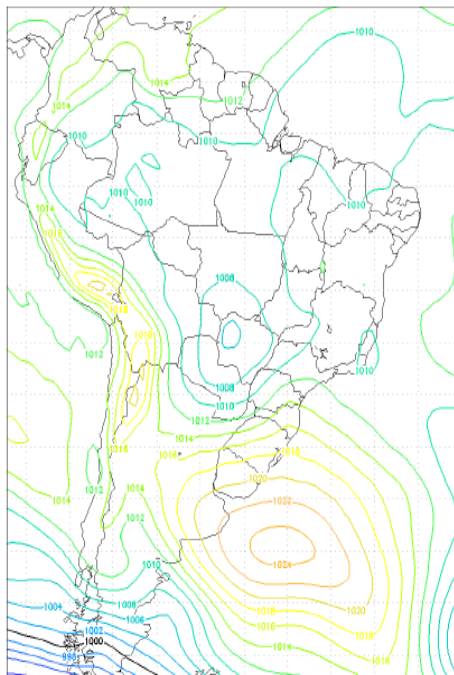
$$\sigma_p = \left(\frac{\alpha}{c_p} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) = \frac{RT}{p c_p} - \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{-T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{-T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{(\Gamma_d - \Gamma)}{\rho g}$$

es el parámetro de estabilidad estática en coordenadas isobáricas. Para un flujo estacionario, adiabático y establemente estratificado ($\sigma_p > 0$) vale que

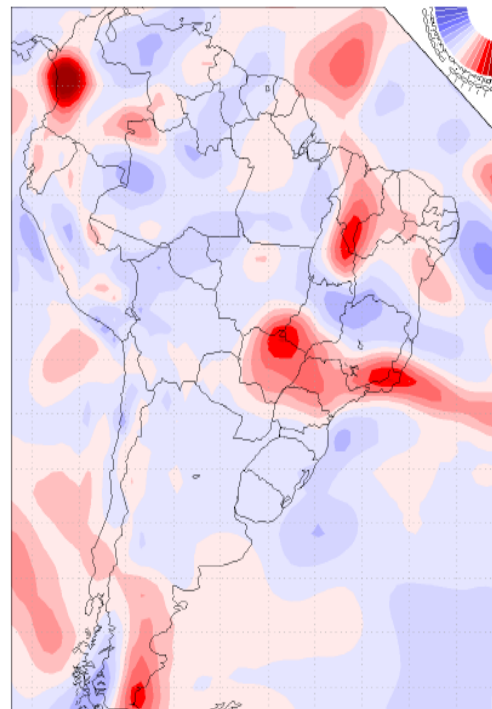
$$\frac{(-\vec{V}_h \cdot \nabla T)}{-\sigma_p} = \omega.$$

lo cual indica que la advección horizontal de temperatura está relacionada con el movimiento vertical de forma tal que la advección de aire cálido (frío) está asociado con movimientos verticales ascendentes (descendentes). Es interesante notar de que a pesar de las hipótesis planteadas, en particular que el flujo sea estacionario, la relación se verifica hasta cierto punto en la atmósfera real de latitudes medias (ver figura 4.4). Dado que la velocidad vertical es muy difícil de medir, la advección de temperatura, y en particular su signo, es una cantidad muy útil para el diagnóstico.

Global
 Análise Inicializada em: 28/2/2011, 12 UTC (Monday) Válida para: 01/3/2011, 12 UTC (Tuesday)
 Pressão Reduzida ao Nível do Mar - [hPa] Nível0



Global
 Análise Inicializada em: 28/2/2011, 12 UTC (Monday) Válida para: 01/3/2011, 12 UTC (Tuesday)
 Velocidade Vertical 500 hPa - [Pa/s] Nível0



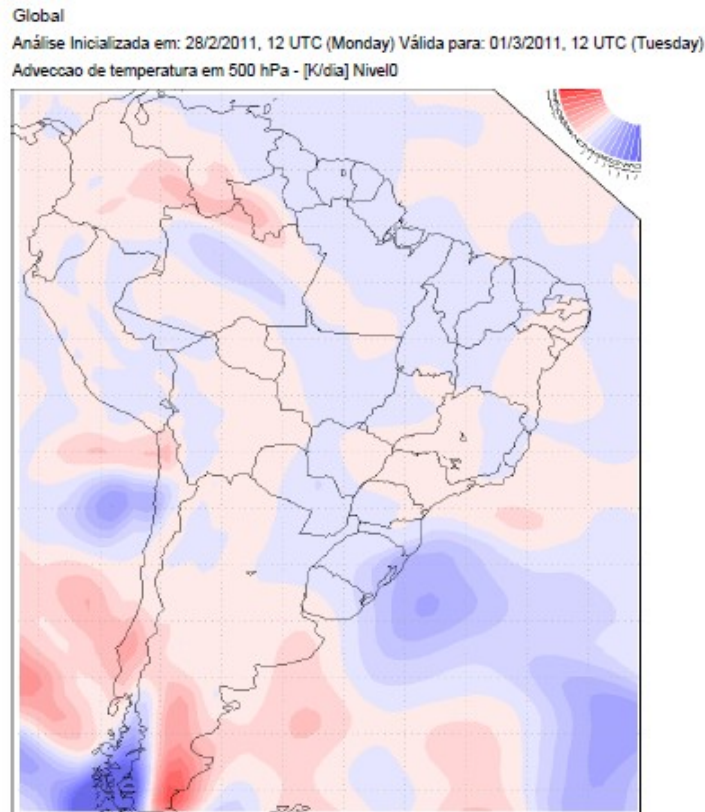


Figura 4.4 – Presión a nivel del mar, velocidad vertical en 500mb y advección de temperatura en 500mb para el 28/2/2011 en un AGCM.

4.2 Temperatura potencial como coordenada vertical

El uso de la presión como coordenada vertical simplifica las ecuaciones pues la densidad ya no aparece en la ecuación de continuidad ni en el equilibrio geostrófico. Sin embargo, las parcelas no están restringidas a moverse en superficies de presión constante de la misma forma que tampoco lo están en superficie de altura geométrica constante.

Esto puede mejorarse usando la temperatura potencial como coordenada vertical ya que (1) para estratificaciones estables (estáticamente) θ es una función monótonica de la altura y (2) para procesos adiabáticos las parcelas de aire deben moverse a lo largo de superficies de θ constante (o isentrópicas).

Las ecuaciones de conservación de momento horizontal en coordenadas isentrópicas se derivan en forma similar a la realizada para el caso de considerar la presión como coordenada vertical por lo que no se repetirá aquí. Se pueden escribir como

$$\frac{d\vec{V}_\theta}{dt} = -\nabla_\theta \Psi_M - f\hat{k} \times \vec{V}_\theta + \vec{F}_\theta$$

donde Ψ_M se denomina función corriente de Montgomery y vale

$$\Psi_M = (c_p T + \phi)_\theta$$

El equilibrio geostrófico en este sistema de coordenadas queda expresado en función de la función corriente de Montgomery y da lugar a un flujo “horizontal” a lo largo de las superficies isentrópicas.

Notar que

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_\theta \frac{\partial}{\partial x} + v_\theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

y del último término se ve claramente que sólo un calentamiento diabático puede dar lugar a un movimiento vertical de la parcela.

El balance hidrostático en coordenadas isentrópicas queda

$$\frac{\partial \Psi_M}{\partial \theta} = \frac{c_p T}{\theta}$$

La ecuación de continuidad se puede encontrar considerando la masa en un elemento de volumen $\delta x \delta y \delta \theta$ donde $\delta \theta$ es la distancia entre superficies isentrópicas a diferentes niveles de presión. Esto resulta en la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \nabla \cdot \vec{V}_\theta - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$$

donde el término a la izquierda representa un cambio local en la masa de la parcela, y

los dos primeros términos a la derecha representan la advección horizontal de masa en superficies isentrópicas. El tercer término a la derecha describe el cambio en la masa de la parcela debido a la divergencia del flujo: convergencia aumenta la cantidad de masa entre dos superficies isentrópicas. El último término es debido al calentamiento diabático: gradientes verticales de calentamiento diabático cambian la distancia entre superficies isentrópicas y contribuyen a cambios locales de masa.

---- Resuelva Ejercicios 1 y 2 del Práctico 3 ----

4.3 Viento térmico

Consideremos la situación de la figura 4.5 donde una columna fría y otra relativamente más cálida se encuentran juntas. De acuerdo a la ecuación hipsométrica el espesor de la columna más cálida debe ser mayor. Por lo tanto, la distancia entre las superficies de 800 y 1000 hPa debe ser mayor en la columna cálida que en la fría por lo que la superficie de 800 hPa debe inclinarse. El mismo razonamiento implica que la superficie de 500 hPa debe inclinarse hacia abajo en la columna fría con una pendiente mayor. Así, la pendiente de las superficie isobáricas aumenta con la altura en presencia de un gradiente horizontal en la temperatura media de la columna de aire. Esto implica que la fuerza del gradiente de presión aumenta con la altura y por lo tanto el viento geostrófico también debe aumentar. La relación entre el aumento del viento geostrófico con la altura y el gradiente horizontal de temperatura se denomina **viento térmico**.

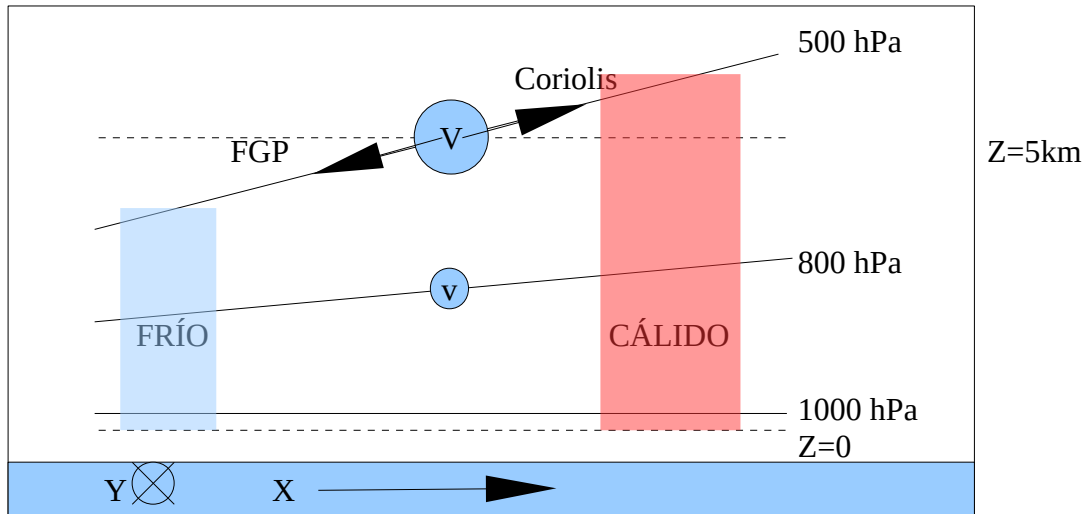


Figura 4.5 – Corte vertical en una región con gradiente horizontal de temperatura. Las líneas sólidas oscuras son isóbaras; líneas claras son contornos de elevación. En $z=0$ el viento es nulo pues el gradiente horizontal de presión desaparece. A 5.5 km de altura existe un viento geostrofico hacia afuera de la página (H.S.).

Asumiendo equilibrio hidrostático junto a la ley de gases ideales

$$g \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{-1}{\rho} = \frac{-RT}{p}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{-RT}{p}$$

Por otro lado, la derivada vertical del viento geostrofico en coordenadas de presión es

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = \frac{k}{f} \wedge \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

y sustituyendo queda

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = \left(\frac{-R}{fp} \right) k \wedge \nabla T$$

que es la expresión matemática del **viento térmico**. En componentes se puede escribir

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{f p} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial p} = \frac{-R}{f p} \frac{\partial T}{\partial x}$$

Notar que estas ecuaciones están de acuerdo a la figura 4.5: se tiene $dT/dx > 0$ y por lo tanto $dv_g/dp > 0$ en el HS.

Estrictamente hablando el viento térmico es la diferencia del viento geostrófico entre dos niveles. Escribiendo

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial \ln p} = \left(\frac{-R}{f} \right) k \wedge \nabla T$$

podemos integrar entre dos niveles p_0 y p_1 ($p_0 > p_1$)

$$V_T = V_g(p_1) - V_g(p_0) = \frac{-R}{f} \int_{p_0}^{p_1} (k \wedge \nabla T) d \ln p$$

Si T es la temperatura media en la capa entre las presiones p_0 y p_1 , las componentes del viento térmico quedan de la forma

$$u_T = \frac{-R}{f} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \ln(p_0/p_1)$$

$$v_T = \frac{R}{f} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \ln(p_0/p_1)$$

cuya expresión vectorial es

$$V_T = \frac{R}{f} k \wedge \nabla \bar{T} \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

Alternativamente, podemos expresar el viento térmico para una capa de atmósfera dada en términos del gradiente horizontal de la diferencia de geopotencial entre la capa superior e inferior

$$u_T = \frac{-1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\phi_1 - \phi_0)$$

$$v_T = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_1 - \phi_0)$$

La ecuación del viento térmico es una herramienta muy útil para verificar la consistencia de los campos observados de temperatura y viento. Asimismo, puede usarse para estimar la advección horizontal media de temperatura en una capa. Notar que $(k \wedge \nabla T)$ es un vector paralelo a las isoterma por lo que el viento térmico es paralelo a las isoterma (o líneas de igual espesor) con el aire cálido a la derecha en el H.N., y a la izquierda en el H.S. El caso para el HS se ilustra en la figura 4.6.

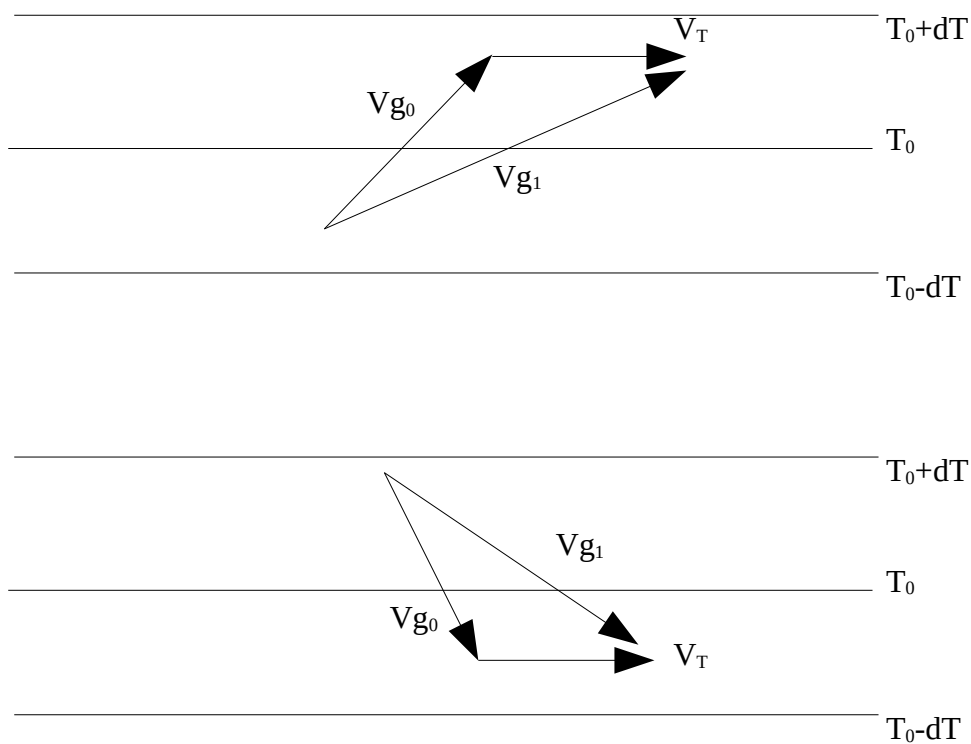


Figura 4.6 – Relación entre el giro del viento geostrófico con la altura y la advección de temperatura horizontal en el H.S. (a) giro horario, (b) giro anti-horario.

El caso de viento geostrófico girando en sentido horario con la altura está asociado con advección de aire frío; un giro anti-horario con la altura está asociado a advección de aire cálido (H.S.). Es posible entonces obtener una estimación razonable de la advección horizontal de temperatura y su dependencia vertical en un lugar dado basado en el perfil de viento.

Para formalizar, consideremos ahora una situación en el H.S. en la cual la dirección del viento geostrófico cambia con la altura (figura 4.7)

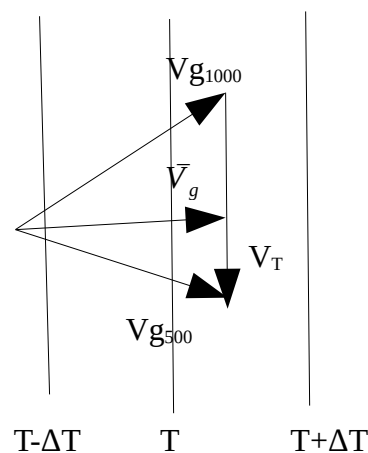


Figura 4.7 – Ejemplo de viento térmico en el H.S. entre 500 mb y 1000 mb. Líneas verticales son líneas de temperatura constante.

El viento térmico está representado por $\vec{V}_T = \vec{V}_{g500} - \vec{V}_{g1000}$ y si la situación ocurre en el H.S. las líneas de igual espesor deben estar dirigidas como se muestran. La advección de temperatura media en la columna realizada por el viento geostrófico puede expresarse

$$-\vec{V}_g \cdot \nabla \bar{T}$$

ó

$$-\vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$$

donde $\vec{V}_g = (\vec{V}_{g500} + \vec{V}_{g1000})/2$ es el viento geostrófico promedio en la capa. De

acuerdo a la figura es claro que en este caso hay advección de aire frío.

Notar que la relación del viento térmico permite “construir” la estructura de la atmósfera: si se conoce la altura en un nivel de presión y el viento térmico entre dos niveles es posible calcular la altura en el otro nivel de presión.

Otra aplicación del viento térmico se puede encontrar en las corrientes en chorro. Estas corrientes tienen un núcleo de máximo de velocidades ubicado cerca de la tropopausa. Dado que a esas latitudes los vientos son predominantemente geostroficados una fracción muy importante del viento total en el jet está descrita por el viento geostrofico. La figura 4.8 muestra para un día dado la corriente en chorro en el H.N. y un corte vertical de los vientos. La existencia de un cortante vertical de vientos entre 700 y 350 hPa indica la existencia de un contraste horizontal de temperatura que también se muestra en la figura 4.8. Este contraste de temperatura es característico en los frentes asociados a los ciclones extratropicales: como muestra la figura, el máximo de vientos en altura está ubicado en la vecindad del frente frío en superficie lo cual no es accidente sino que es esperable ya que los contrastes de temperatura que caracterizan los frentes fríos deben estar acompañados por máximos de vientos. Esta es una de las razones por las cuales la posición de la corriente en chorro es tan importante en la discusión de sistemas meteorológicos en latitudes medias.

Desde un punto de vista global, el calentamiento diferencial terrestre implica un gradiente meridional de temperatura lo cual implica, debido al viento térmico, un aumento de los vientos del oeste con la altura en latitudes medias. Por lo tanto el hecho de que los sistemas meteorológicos en latitudes medias se muevan de oeste a este es consecuencia directa del calentamiento diferencial de las zonas ecuatoriales y polares por el Sol.

Asumamos ahora que la aceleración centrípeta de una parcela de aire circulando alrededor de un centro de alta o baja presión es pequeña comparada con la aceleración inducida por la fuerza de Coriolis. Además despreciemos la fricción. Entonces el número de Rossby es pequeño y podemos asumir que el balance geostrofico se cumple. Para velocidades de 10 m/s esto se cumple para radios de curvatura del orden de 1000 km (ver más adelante). Si vale el equilibrio hidrostático entonces los campos de temperatura y vientos están ajustados mutuamente al viento térmico. En estas condiciones es posible encontrar relaciones útiles entre el campo de temperatura y el de presión: si el campo de temperatura está correlacionado positivamente con el campo de presión (isotermas son paralelas a isóbaras) entonces bajas se denominan de “núcleo frío” y altas de “núcleo cálido” (fig. 4.9a,b). Si el campo de temperatura está correlacionado negativamente con el campo de presión entonces las bajas son de

“núcleo cálido” y las altas de “núcleo frío” (fig 4.9 c,d).

Las bajas de núcleo frío, típicas de ciclones de latitudes medias durante el invierno, aumentan de intensidad con la altura (fig 4.10a). Bajas de núcleo cálido, como los ciclones tropicales o las bajas térmicas del verano en los subtropicos, decrecen en intensidad con la altura (fig 4.10b). Existen casos cuando las capas bajas de una baja tienen núcleo cálido y en altura tienen núcleo frío, por ejemplo en ciclones subtropicales. Por otro lado, altas de núcleo frío disminuyen en intensidad con la altura (fig 4.10c), como por ejemplo altas someras que se generan sobre los continentes en invierno. Altas de núcleo cálido, como la alta subtropical, aumentan de intensidad con la altura (fig 4.10d).

En Sudamérica los ciclones más frecuentes son los extratropicales existiendo dos áreas preferenciales de formación: a) sobre el océano justo al este de la Patagonia entre 40 S y 50 S, y b) situada en el sudeste de Sudamérica con centro sobre Uruguay y el océano Atlántico adyacente. La figura 4.11 muestra la estructura de un ciclón extratropical y sus fenómenos asociados en nuestra región. Una última región con ciclogénesis menos frecuente está localizada sobre el océano al este del sur de Brasil (más activa de noviembre a abril). Durante los meses de marzo y abril, debido a que la temperatura de superficie del mar alcanza los 24-27 °C algunos ciclones formados en esta región pueden adquirir características subtropicales o tropicales. Ejemplos de estos sistemas son los ciclones Catarina (2004) y Anita (2010).

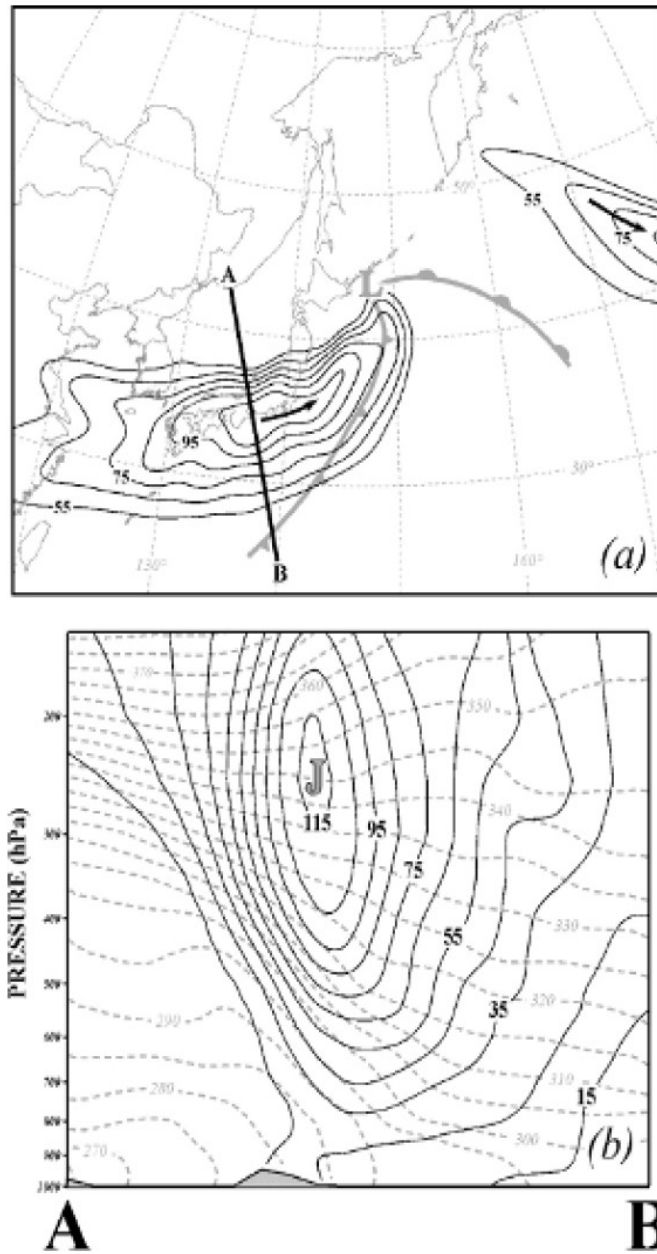


Figura 4.8 – Vientos en 200 mb y posición del frente frío en superficie (panel de arriba). Corte vertical a través de la corriente en chorro mostrando isotacas y temperatura potencial (panel de abajo).

Si el campo de temperatura no coincide perfectamente con el de presión las bajas se inclinan hacia la columna de aire frío y las altas hacia la columna de aire cálido. Asimismo, si existen bajas y altas en superficie y el viento térmico es en general de los oestes (por haber aire cálido cerca del ecuador y aire frío cerca de los polos) las altas se convierten en cuñas en altura y las bajas se convierten en vaguadas.

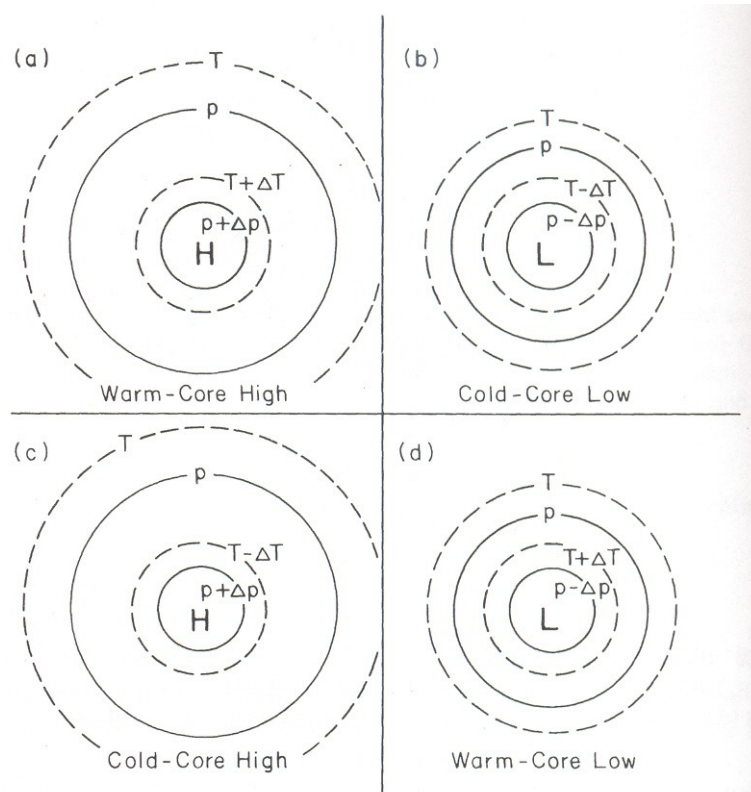


Figura 4.9 – Ejemplos idealizados de (a) alta de núcleo cálido, (b) baja de núcleo frío, (c) alta de núcleo frío, y (d) baja de núcleo cálido. Isóbaras (líneas sólidas), isotermas (líneas quebradas).

La relación del viento térmico tiene múltiples aplicaciones, pues, a primera aproximación la atmósfera de latitudes medias se encuentra en balance geostrófico e hidrostático. La combinación de estos balances en el viento térmico nos provee con una herramienta de diagnóstico potente para entender la estructura, dinámica y evolución de los sistemas meteorológicos en latitudes medias.

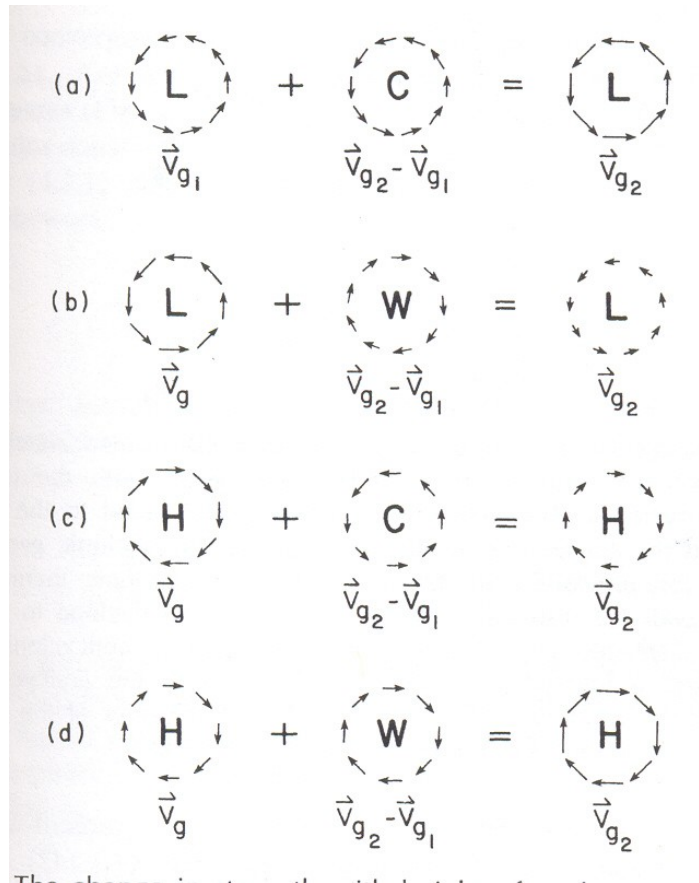


Figura 4.10 – Cambio en intensidad con la altura en ciclones y anticiclones debido a gradientes horizontales de temperatura orientados paralelamente al gradiente de presión o altura. La primera columna muestra el viento geostrófico en (a) y (b) ciclones, y (c) y (d) anticiclones (H.N.). La segunda columna muestra el viento térmico (W indica núcleo cálido, C núcleo frío) y la tercera columna la suma de las dos primeras para obtener el viento geostrófico en altura.

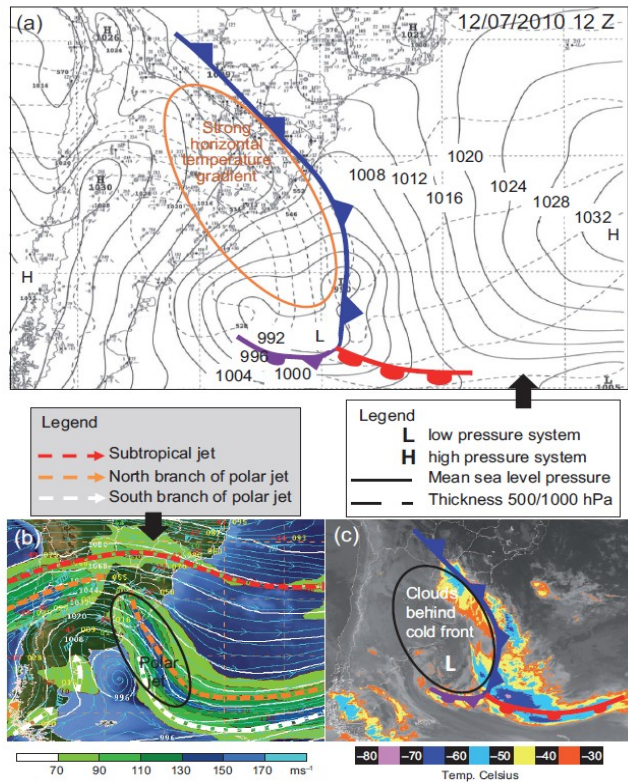


Fig. 1. Synoptic fields at 12:00 UTC on July 12, 2010 showing the features of a classical cold front. (a) Surface synoptic chart showing sea-level pressure (hPa, black line), thickness between 1000-500 hPa (dashed lines), the fronts position (cold front in blue, warm front in red and occluded front in purple) and surface data from synoptic weather stations plotted in conventional model. (b) Synoptic chart at 250 hPa showing geopotential height in tens of meters (white lines), streamlines (light blue lines), isotachs (kts, green shaded), upper level jets stream position and upper-data from synoptic weather stations plotted in conventional model. (c) Brightness temperature (°C) from GOES-13 (data from the CPTEC, INPE).

Figura 4.11 – De Escobar et al (2019).

4.3.1 *Atmósferas barotrópicas y baroclínicas*

Una atmósfera se dice **barotrópica** cuando la densidad sólo depende de la presión, $\rho = \rho(p)$ de tal forma que superficies isobáricas son también superficies de densidad constante. Para un gas ideal las superficies isobáricas también son isotermas en una atmósfera barotrópica. Por lo tanto $\nabla_p T = 0$ en una atmósfera barotrópica y el viento térmico es nulo, o sea el viento geostrofico es independiente de la altura.

Una atmósfera se dice **baroclínica** si la densidad depende de la presión y de la temperatura $\rho = \rho(p, T)$. En este tipo de atmósfera el viento geostrofico tiene en general un cortante vertical relacionado con el gradiente horizontal de temperatura dado por la ecuación del viento térmico. La baroclinicidad de la atmósfera es una característica esencial para el estudio de la dinámica, pero veremos más adelante que es

posible aprender mucho sobre la atmósfera real considerándola barotrópica.

4.3.2 Inestabilidad baroclínica

La inestabilidad baroclínica es una inestabilidad hidrodinámica que ocurre debido a la existencia de un gradiente de temperatura meridional (y por lo tanto de un cortante vertical de los vientos y de viento térmico) en una atmósfera en equilibrio cuasi-geostrófico y estáticamente estable. La longitud de onda más inestable corresponde a una perturbación de escala sinóptica. La perturbación crece pues en la inestabilidad se convierte energía potencial del flujo medio en energía cinética de la perturbación.

La inestabilidad baroclínica juega un papel esencial en el desarrollo de los ciclones extratropicales. Para ver eso consideremos los campos en niveles altos y bajos durante el comienzo del desarrollo de un ciclón. En los estadios iniciales del desarrollo se observa una onda débil de temperatura en niveles bajos que se forma al este del eje de vaguada (figura 4.12a). A medida que se desarrolla el ciclón en superficie (figuras 4.12b,c) la advección de aire frío al oeste del ciclón reduce el espesor de la capa entre 1000 y 500 hPa y profundiza la vaguada en altura. Al mismo tiempo, advección de aire cálido al este del ciclón aumenta el espesor de la capa 1000-500 hPa intensificando la cuña en altura. Así, la advección diferencial de temperatura al este y oeste del ciclón amplifica la onda inicial en altura.

Pero, existe un efecto adicional que veremos más adelante. A medida que se amplifica la onda en altura la advección de vorticidad ciclónica corriente abajo de la vaguada genera ascenso directamente arriba del ciclón, intensificándolo. Como los vientos del ciclón se intensifican, se da una mayor advección de aire frío al oeste y de aire cálido al este, que intensifica aún más a la onda en niveles altos. Por lo tanto, existe una retroalimentación positiva entre los procesos que ocurren en niveles altos y bajos: inestabilidad baroclínica.

El ciclón aumenta su intensidad hasta que la inestabilidad se termina. Esto ocurre pues a medida que se desarrolla el ciclón la región de baja presión en niveles altos se mueve y termina ubicándose exactamente arriba del ciclón de superficie. En esta etapa, que se denomina madura, el ciclón tiene núcleo frío en toda la columna, y la retroalimentación positiva ya no existe por lo que el ciclón tenderá a decaer.

Los mecanismos descritos cualitativamente en esta sección constituyen la ecuación omega que se desarrollará en el capítulo 6 y que permite diagnosticar la velocidad vertical a partir del campo de geopotencial.

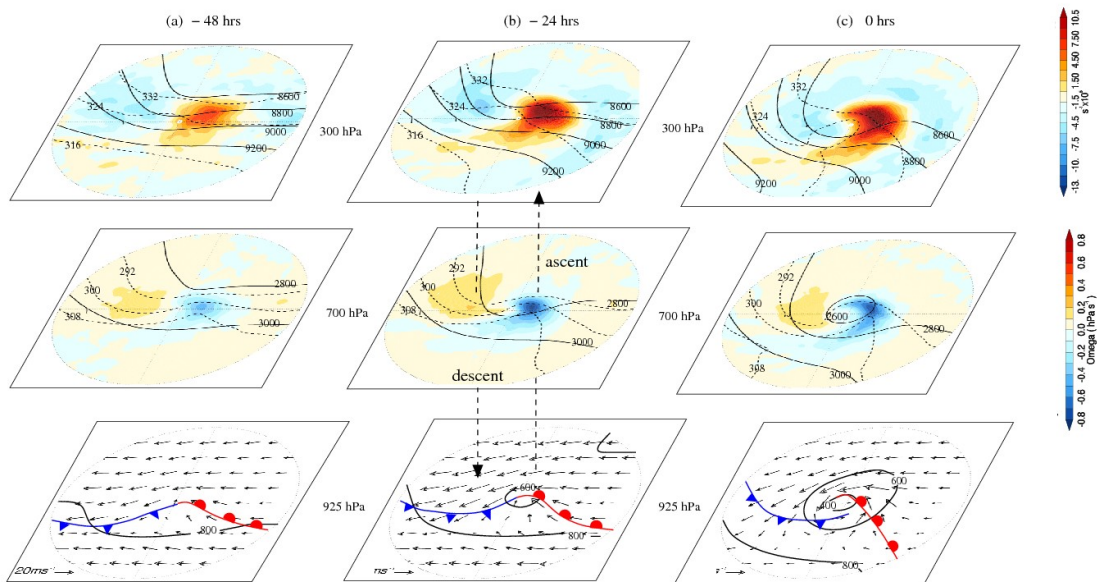


Figura 4.12 – Evolución típica de un ciclón 48 hs, 24 hs antes del pico que ocurre a las 0 hs en el H.N. Paneles inferiores: vientos y altura de geopotencial (líneas solidas) en 925 hPa. Peneles del medio: Altura de geopotencial (lineas punteadas) y velocidad potencial (en color) en 700 hPa. Paneles superiores: Altura de geopotencial, temperatura potencial y divergencia en 300 hPa (de Univ. of Reading).

— Repase el concepto de viento térmico haciendo la sección “Aplicaciones del viento térmico” del sitio web de MetEd https://www.meted.ucar.edu/dynamics/thermal_wind_es/navmenu.php?tab=1&page=12-0-0&type=flash —

---- Resuelva Ejercicios 3, 4, 5 y 6 del Práctico 3 ----

4.4 Flujos horizontales balanceados

Como mostramos en las secciones anteriores, a pesar de la aparente complejidad de los movimientos atmosféricos, es posible explicar las distribuciones de presión y vientos en una primera aproximación en términos de simples balances de fuerzas. En

particular, vimos que a primer orden el flujo se encuentra en balance geostrófico lo que nos permitió entender algunas de las características más salientes de la circulación a escala sinóptica. Para ir más allá del flujo geostrófico y mejorar nuestra comprensión de los balances horizontales que gobiernan el flujo atmosférico consideraremos un flujo idealizado estacionario y horizontal (sin componente vertical de vientos).

Describiremos el flujo expandiendo la forma isobárica de las ecuaciones de momento horizontal en sus componentes usando un sistema de coordenadas naturales. Este sistema de coordenadas cartesiano está definido por un conjunto ortogonal de versores \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{k} , donde \mathbf{t} está orientado paralelo a la velocidad en cada punto, \mathbf{n} es normal a la velocidad y orientado de tal forma que es positivo hacia la izquierda del flujo y \mathbf{k} está dirigido hacia arriba (figura 4.13). En este sistema de coordenadas $\mathbf{V} = V\mathbf{t}$, $V = ds/dt$, donde $s(x,y,t)$ es la distancia a lo largo de la trayectoria que sigue una parcela de aire. Entonces la aceleración es

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\hat{t}) = \hat{t}\frac{dV}{dt} + V\frac{d\hat{t}}{dt}$$

La razón de cambio en la dirección de \mathbf{t} siguiendo el movimiento se deriva a través de consideraciones geométricas (figura 4.13) y depende de la curvatura (R) del flujo. Para describir la curvatura tomamos la convención de que el radio de curvatura de la trayectoria de la parcela será positivo cuando \mathbf{n} está dirigida hacia el centro de curvatura. Por lo tanto, $R > 0$ para flujo antihorario y $R < 0$ para flujo horario. Entonces, de la figura 4.13

$$\delta\psi = \frac{\delta s}{R} = \frac{\delta\hat{t}}{|\hat{t}|} = \delta\hat{t}$$

Como para $\delta s \rightarrow 0$, $\delta\mathbf{t}$ es paralelo a \mathbf{n} , vale

$$\lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta\hat{t}}{\delta s} = \frac{d\hat{t}}{ds} = \left(\frac{1}{R}\right)\hat{n} = \frac{\hat{n}}{R}$$

por lo que

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\hat{n}}{R}\right)V = \left(\frac{V}{R}\right)\hat{n}$$

y

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\hat{t} + \frac{V^2}{R}\hat{n}$$

lo cual demuestra que la aceleración siguiendo el movimiento es la suma de la razón de cambio de la velocidad de la parcela de aire en la dirección del movimiento y de la aceleración centrípeta resultante de la curvatura del flujo.

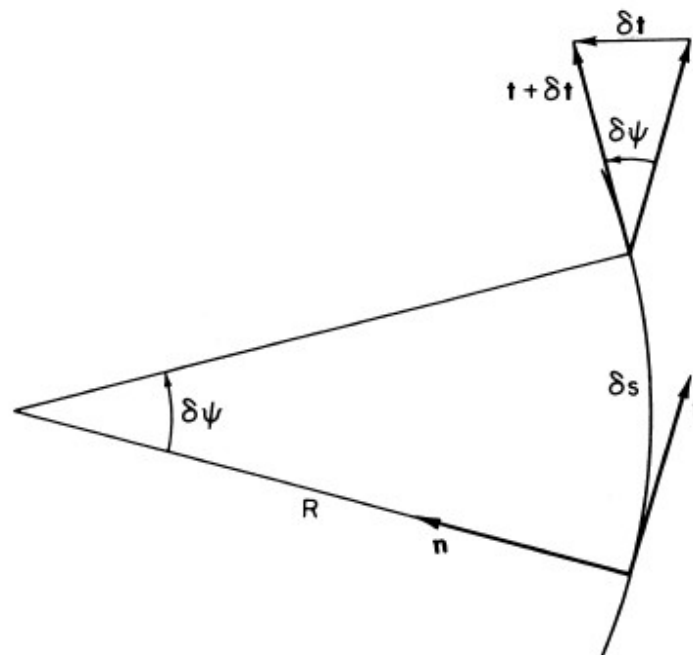


Figura 4.13 – Razón de cambio del vector tangente \mathbf{t} siguiendo el movimiento.

Puesto que la fuerza de Coriolis siempre actúa normal a la dirección del movimiento, en coordenadas naturales se escribe como

$$-f\hat{k} \times \vec{V} = -(fV)\hat{n}$$

La fuerza gradiente de presión tiene componentes a lo largo y en dirección normal al flujo por lo que queda reescrita de la forma

$$-\nabla_p \phi = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \hat{t} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \hat{n} \right)$$

Por lo tanto la ecuación de movimiento en coordenadas naturales es

$$\left(\frac{dV}{dt} \hat{t} + \frac{V^2}{R} \hat{n} \right) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \hat{t} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \hat{n} \right) - (fV) \hat{n}$$

y si la dividimos en cada uno de sus componentes

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = - \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Para flujos paralelos a los contornos de altura de geopotencial $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$ (no hay cambio en la altura del geopotencial en la dirección del flujo) y la rapidez del flujo (V) es constante. Si, además, el gradiente del geopotencial en la dirección normal al flujo es constante a lo largo de la trayectoria $\frac{\partial \phi}{\partial n} = cte$, la segunda ecuación implica que R también es constante, En este caso el flujo puede ser clasificado en categorías basado en la contribución relativa de los tres términos de la ecuación para la componente en \mathbf{n} de las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, es posible recuperar el **viento geostrófico** tomando un flujo recto, es decir $|R| \rightarrow \infty$. En este caso la aceleración centrípeta es despreciable y

$$V_g = - \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

4.3.1 Flujo inercial

Si el geopotencial es uniforme en superficies isobáricas de tal forma que el

gradiente de presión horizontal sea nulo se obtiene un balance entre Coriolis y la fuerza centrífuga

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0.$$

Este movimiento, denominado inercial, está gobernado solamente por fuerzas que provienen de la inercia del fluido. Para estos movimientos el radio de curvatura de las trayectorias está dado por

$$R = -\frac{V}{f}$$

Si R es pequeño las trayectorias son circulares y anticiclónicas. Como la velocidad de las parcelas es constante el tiempo requerido para completar un círculo de radio R es

$$\left| \frac{2\pi R}{V} \right| = \left| \frac{2\pi R}{-Rf} \right| = \left| \frac{2\pi}{f} \right|$$

que es igual al período de la oscilación inercial local

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{2\Omega \sin \phi} = \frac{\pi}{\Omega \sin \phi} \\ &= \left(\frac{1/2 \text{ rotation}}{1 \text{ rotation/day}} \right) \frac{1}{\sin \phi} = \frac{1/2 \text{ day}}{\sin \phi} \end{aligned}$$

o sea medio día dividido por el seno de la latitud.

Este fenómeno es relativamente común en el océano cuando por ejemplo una ráfaga de viento sopla sobre la superficie. Luego de que la ráfaga pasó las aguas superficiales continúan su movimiento bajo la acción de las fuerzas inerciales y las parcelas de agua describen un movimiento circular. En la atmósfera los movimientos son casi siempre generados y mantenidos por fuerzas de gradiente de presión; las condiciones requeridas para el movimiento inercial existen muy raramente.

4.3.2 Flujo ciclostrófico

En latitudes bajas o para flujos de escalas espaciales horizontales pequeñas la fuerza de Coriolis puede ser despreciada. Para estos casos la ecuación en \mathbf{n} se reduce a un balance entre la fuerza centrífuga y el gradiente de presión

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

lo cual implica

$$V = \left(-R \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)^{1/2}$$

Este balance se conoce como balance ciclostrófico y V es el **viento ciclostrófico**. Dado que Coriolis no interviene y que la fuerza centrífuga es siempre hacia afuera del eje de rotación, la fuerza gradiente de presión debe ser siempre hacia dentro por lo que el movimiento se da alrededor de una baja presión. No obstante, notemos que no existe una preferencia para el sentido del flujo alrededor de una baja (puede ser ciclónico o anticiclónico, figura 4.14).

Para que la fuerza centrífuga sea mucho mayor que la de Coriolis debe valer

$$\frac{V^2/R}{fV} = \frac{V}{Rf} \gg 1$$

lo cual dice que el número de Rossby debe ser $\gg 1$. Esto es válido para vórtices de escalas pequeñas como los tornados, que tienen velocidades tangenciales del orden de 100 m/s y diámetro no mayor que 1000m. Para tornados que ocurran en nuestras latitudes ($f \sim 10^{-4}$ 1/s) el número de Rossby vale $Ro \sim 1000$. Por lo tanto, los vientos observados en un tornado están, a primer orden, en balance ciclostrófico. Consistente con esta relación, a pesar de que la mayor parte de los tornados son ciclónicos pues se desarrollan en ambientes que favorecen la rotación ciclónica (horario en el H.S.), también se observan algunos anticiclónicos. Vórtices de escalas más pequeñas, donde también vale la aproximación ciclostrófica, como “dust devils” no tienen sentido de giro preferido (figura 4.15).

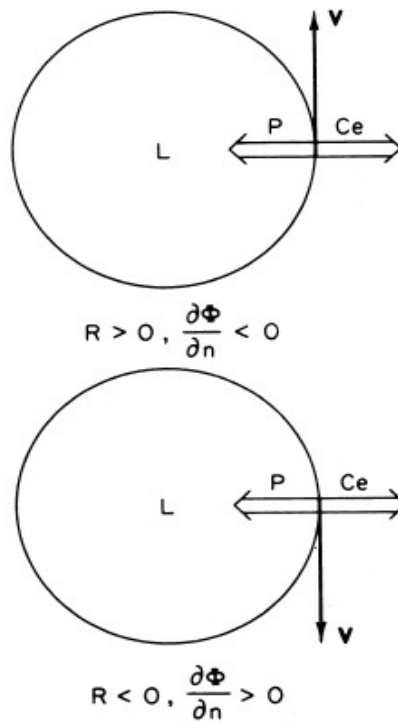


Figura 4.14 – Balance de fuerzas en un viento ciclostrofico, alrededor de una baja.



Figura 4.15 - “Dust devil”.

4.3.3 Viento gradiente

Como observamos anteriormente, el análisis de la altura de geopotencial y los vientos en 500 mb (figura 4.2) muestra que aún en regiones de flujo variable con curvatura el viento es casi siempre paralelo a las líneas de igual altura de geopotencial. Este viento se conoce como **viento gradiente** y es el resultado del balance de la fuerza de Coriolis, el gradiente de presión y la fuerza centrífuga que aparece por la curvatura del flujo. Como las fuerza de Coriolis y centrífuga actúan en dirección perpendicular al viento, la fuerza gradiente de presión también debe serlo para balancearlas. Por lo tanto el viento gradiente, como el viento geostrófico, debe fluir en dirección paralela a las isóbaras.

El viento gradiente es una mejor aproximación al viento real que el viento geostrófico y su ecuación de movimiento es

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

La expresión es cuadrática en V, por lo que sus solución es

$$V = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4(1/R)(\partial\phi/\partial n)}}{(2/R)} = -\frac{fR}{2} \pm \left(\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)^{1/2}$$

Existen 8 soluciones posibles de esta ecuación pues R y $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ pueden ser positivos o negativos pero no todas son físicamente válidas ya que V debe ser un número positivo. La figura 4.16 muestra el árbol de las posibles soluciones.

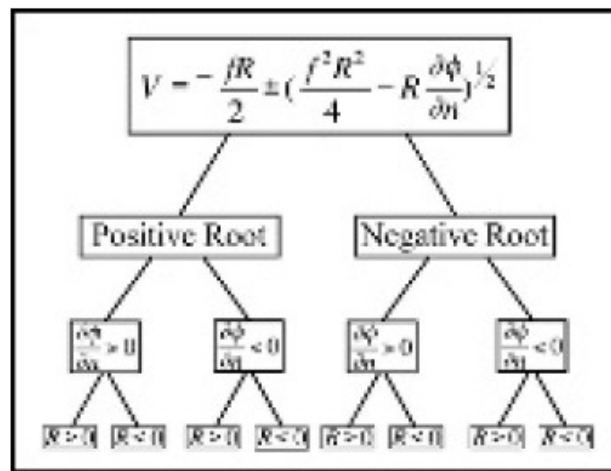


Figura 4.16 – Soluciones de la ecuación del viento gradiente.

A) Caso $\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0, R > 0$

Las dos soluciones dan $V < 0$ y por lo tanto no son físicamente posibles.

B) Caso $\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0, R < 0$

El producto $-R \frac{\partial \phi}{\partial n} > 0$ por lo que el radical es mayor que la magnitud de $fR/2$.

Además, como $R < 0$ para el H.N. $-fR/2 > 0$. Por lo tanto, la raíz positiva produce una $V > 0$ y corresponde a una solución física ilustrada en la figura 4.17 (la raíz negativa es físicamente inválida). En el H.N. $R < 0$ implica flujo anticiclónico y \mathbf{n} está dirigido hacia afuera del centro de rotación. Dado que $\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0$ debe haber una baja presión en el centro. Consecuentemente el gradiente de presión y Coriolis están ambas dirigidas hacia el centro y la fuerza centrífuga debe ser suficientemente grande como para balancear la suma de esas fuerzas. Este caso se denomina **baja anómala**, y a pesar de que es una

situación válida es raramente observada en la naturaleza.

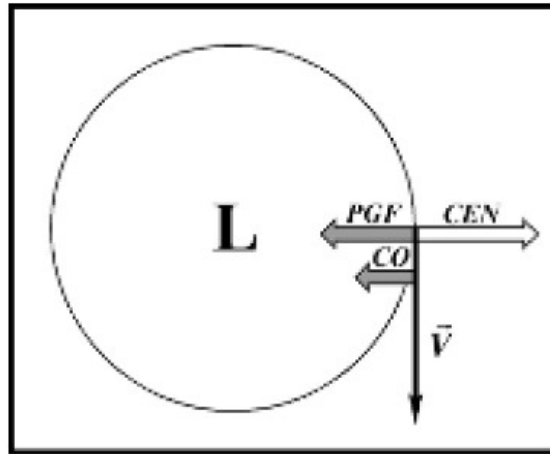


Figura 4.17 – Balance de fuerzas para una baja anómala en el H.N.

C) Caso $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0, R > 0$

La raíz positiva corresponde a una solución físicamente válida mostrada en la figura 4.18 (la raíz negativa no es válida). Para el H.N. $R > 0$ implica una rotación anti horaria alrededor del centro de tal forma que \mathbf{n} es hacia adentro. Como $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0$ el flujo gira alrededor de un mínimo del geopotencial. Por lo tanto el gradiente de presión es hacia el centro mientras que Coriolis y la centrífuga son hacia afuera. Esta es la situación que corresponde a una **baja normal**.

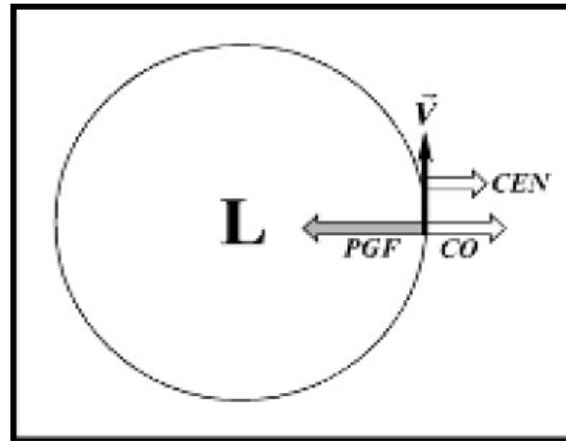


Figura 4.18 – Balance de fuerzas en una baja normal en el H.N.

D) Caso $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0, R < 0$

El producto $-R \frac{\partial \phi}{\partial n} < 0$; dependiendo de su magnitud, el término en la raíz puede ser menor que cero en cuyo caso se obtiene una solución imaginaria no física. Si la raíz es real la solución para la raíz positiva es $V \geq -fR/2 > 0$ (H.N.). En este caso la solución es de la forma mostrada en la figura 4.19, con flujo horario alrededor de un centro de rotación. Como $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0$ el centro debe ser un máximo de geopotencial y por lo tanto la fuerza gradiente de presión es hacia afuera, mientras que Coriolis es hacia adentro. El resultado es un flujo horario alrededor de un centro de alta presión, lo cual parece el caso normal. No obstante, como $V \geq -fR/2 > 0$ vale

$$2 \frac{V^2}{R} \geq -fV$$

o sea que la fuerza de Coriolis es menor que el doble de la fuerza centrífuga. Esto implica que la fuerza centrífuga debe ser mayor que la del gradiente de presión y este caso se denomina **alta anómala**.

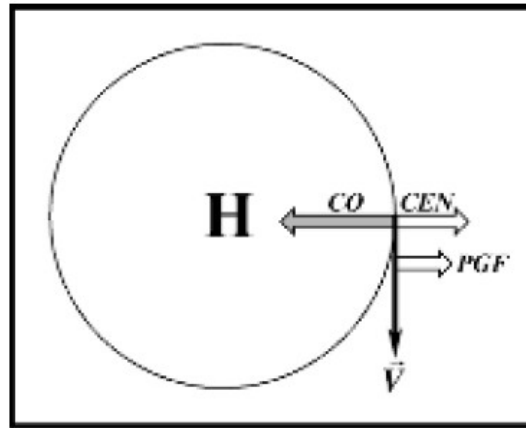


Figura 4.19 – Balance de fuerzas en una alta anómala en el H.N.

Ahora, siendo la raíz positiva, si consideramos el signo negativo obtenemos una solución real tal que $V \leq -fR/2 > 0$. Como $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0$ el centro de rotación es un máximo de geopotencial y la solución es del tipo mostrado en la figura 4.20. Como en este caso la fuerza del gradiente de presión es mayor que la fuerza centrífuga la solución se denomina **alta normal**.

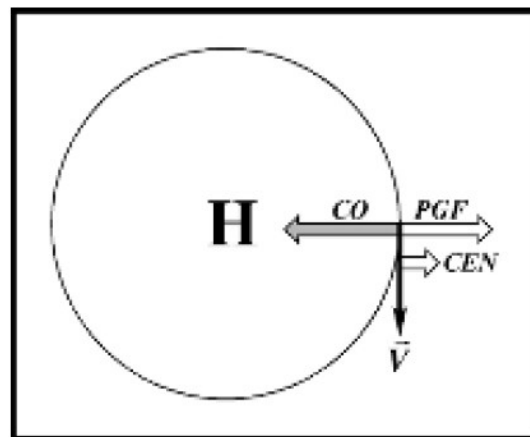


Figura 4.20 – Balance de fuerzas en una alta normal en el H.N.

Es interesante notar que la existencia de las altas normal y anómala depende de que

valga

$$\left(f^2 \frac{R^2}{4} - R \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)^{1/2} \geq 0$$
$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right| \leq \frac{|R| f^2}{4}$$

sugiriendo que existe un límite en la magnitud del gradiente de presión en la cercanía de los sistemas de alta presión tal que a distancias cercanas al centro el gradiente de presión debe ser muy pequeño, y cero en el centro. Esta es la razón por la cual el campo de presión cerca de los centros de las altas es relativamente constante y con vientos muy débiles. Estas condiciones propician temperaturas muy bajas en las noches de invierno y la formación de nieblas. En el caso de sistemas de baja presión no existe un límite y esto se ve claramente en los mapas de presión a nivel del mar (figura 4.21).

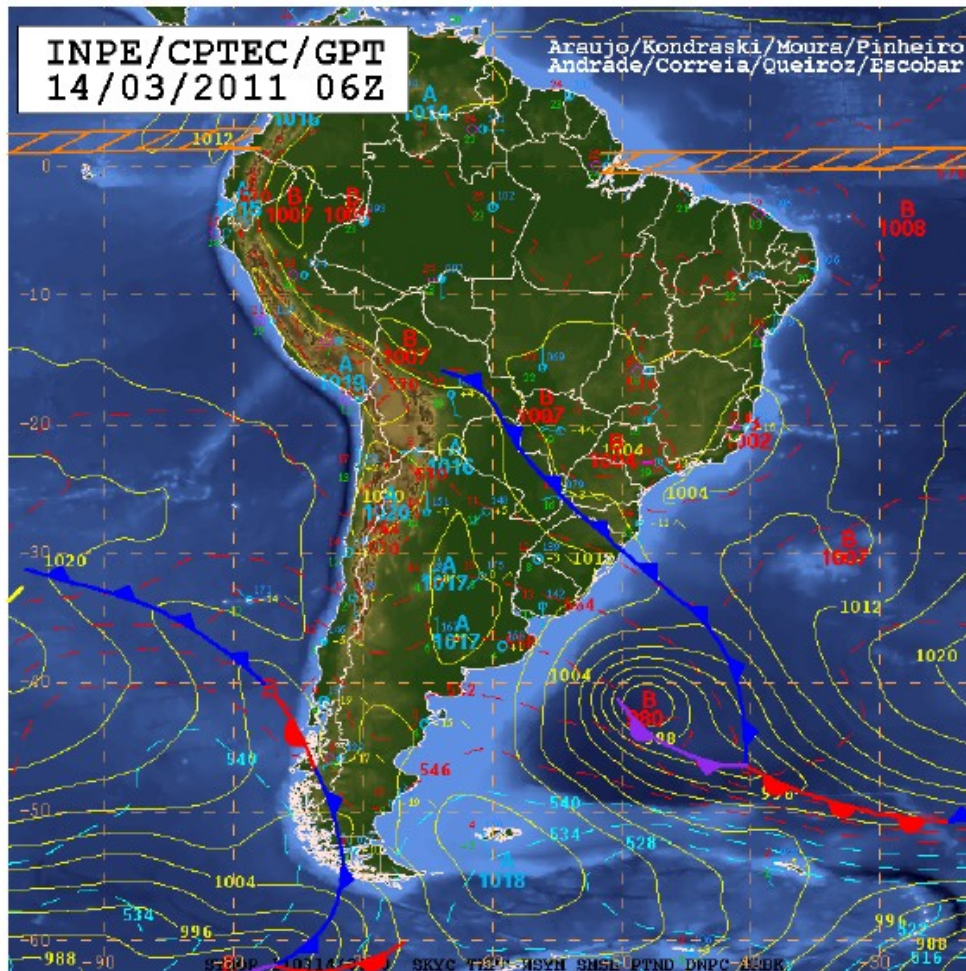


Figura 4.21 – Carta sinóptica en superficie del 14/3/2011. Se observa claramente la diferencia de intensidades del gradiente de presión en el centro de bajas y altas.

Es interesante notar que el término “anómalo” para bajas y altas se refiere a diferentes cosas. En el caso de “alta anómala” se refiere a un sistema de alta presión cuyos vientos asociados son mayores que los “normales”, mientras que una “baja anómala” se refiere a un sistema de baja presión cuyos vientos asociados giran en sentido contrario al “normal”.

Li (2015) discute la existencia de las circulaciones anómalas. Para encontrar “altas anómalas” se debe enfocar en niveles medios/altos de la atmósfera. Para tener estimaciones de valores asumamos que en 500 hPa, en 45°, el flujo es paralelo a las

isóbaras con un gradiente de presión de 1 hPa/100km. A una distancia de 600 km del centro de la alta presión el viento será 21.1 m/s para la “alta normal” y de 40.6 m/s para la “alta anómala”. En comparación el viento geostrófico es de 13.9 m/s y el viento inercial 61.7 m/s.

Las “bajas anómalas” podrían observarse donde existe flujo inercial. Al igual que las “bajas normales”, las “bajas anómalas” a mayor fuerza gradiente de presión, mayor es el viento resultante. En ambos tipos de bajas el viento no tiene límite. Asumamos que el gradiente de presión es de 1 hPa/100km en 15°. A 600 km del centro el viento sobre la superficie será de 13.8 m/s para una “baja normal” y de 36.3 m/s para una “baja anómala”. En comparación el viento geostrófico será de 22.1 m/s y el viento inercial 22.6 m/s. El viento real será menor a estos valores por la existencia de la fricción.

Hollis (2019) analizó los diferentes tipos de flujo a partir del número de Rossby usando datos de un reanálisis atmosférico. Calculó el Ro para todos los niveles de 1 hasta 1000 hPa, durante 60 años usando datos globales cada 6 hs. Encontró 4.4% de “bajas anómalas”, 5.5 % de “altas anómalas”, 41.4% de “altas normales” y 48.6% de “bajas normales”. La figura 4.22 muestra el mapa para un día cualquiera, donde se observa que las altas y bajas normales dominan las regiones lejos del ecuador como es esperable donde el flujo es más cercano al equilibrio geostrófico, mientras que la circulaciones anómalas ocurren en la región tropical donde la fuerza de Coriolis disminuye.

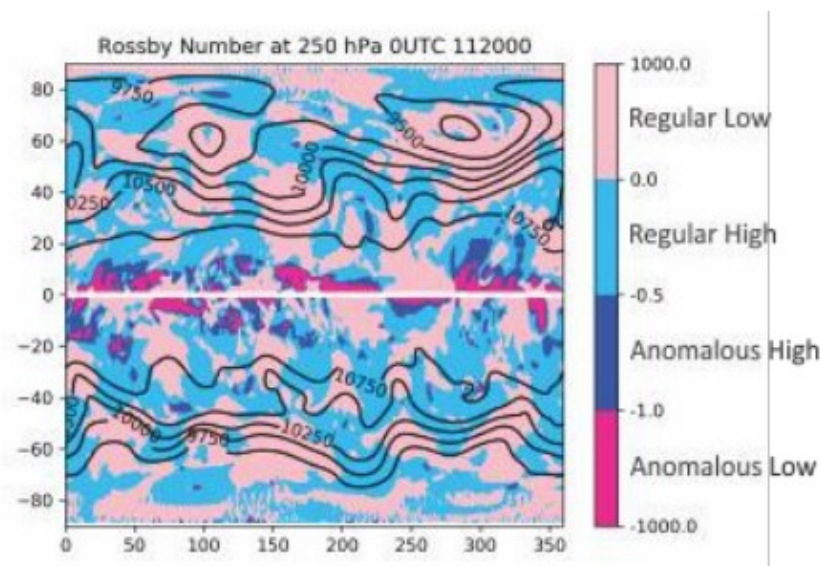


Figura 4.22 – Numero de Rossby categorizado según el tipo de flujo.

Nota: para la derivación de los casos anteriores se consideró el hemisferio norte ($f > 0$). En el caso del hemisferio sur el razonamiento es análogo pero las altas/bajas normales y anómalas ocurren para diferentes combinaciones de $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ y R . Para el caso

- $\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0, R > 0$ se definen las altas anómala (signo positivo) y normal (signo negativo)
- $\frac{\partial \phi}{\partial n} > 0, R < 0$ se define la baja normal (signo positivo)
- $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0, R > 0$ se define la baja anómala (signo positivo)
- $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0, R < 0$ no hay casos físicamente posibles.

Excepto para el caso de la baja anómala, las componentes horizontales de las fuerzas de Coriolis y del gradiente de presión son opuestas. Estos flujos se denominan béricos. El flujo de la baja anómala es antibérico y el viento geostrófico (que es negativo) es claramente una mala aproximación al viento real. Asimismo, se observa que el viento gradiente es ciclónico únicamente cuando la fuerza de Coriolis y la centrífuga actúan en el mismo sentido ($Rf > 0$); es anticiclónico cuando estas fuerzas actúan en dirección contraria. Puesto que la dirección de los flujos ciclónico y anticiclónico cambia en el H.S. el requerimiento de que $Rf > 0$ para flujos ciclónicos vale independiente del hemisferio.

Una de las características dominantes en la atmósfera es que en superficie los ciclones (anticiclones) están ubicados hacia el este de un eje de vaguada (cuña) existente en niveles altos (figura 4.23). Esta distribución puede explicarse considerando el balance del viento gradiente y la ecuación de continuidad de masa.

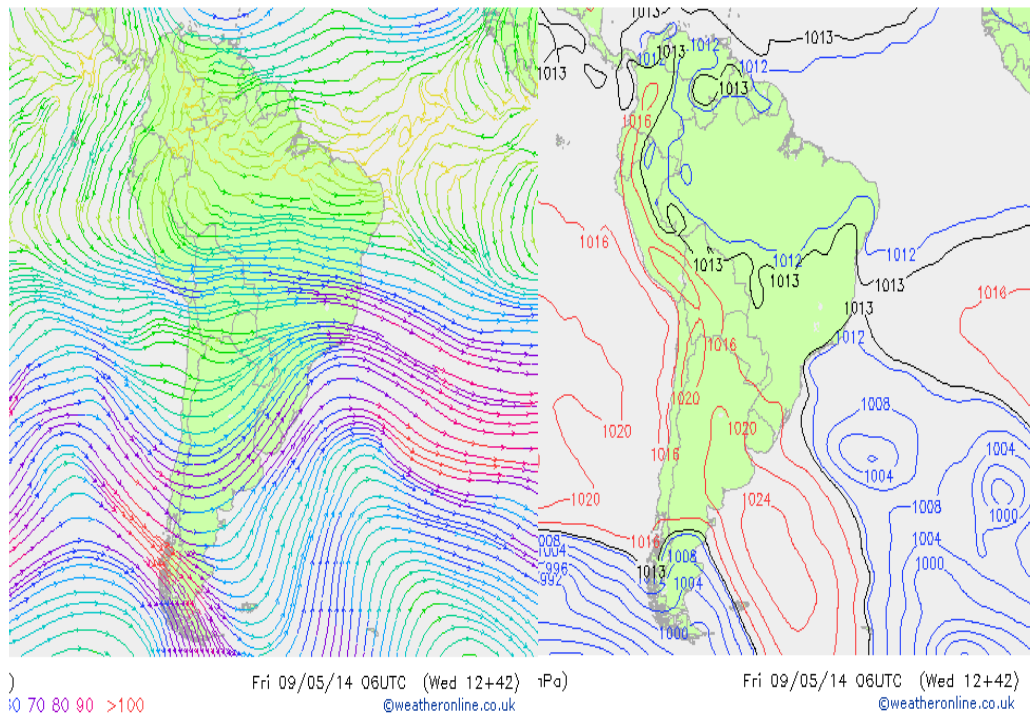


Figura 4.23 – Situación sinóptica mostrando vientos en 200 hPa y presión en superficie.

Por definición, el viento geostrófico es

$$V_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

por lo que el balance del viento gradiente puede escribirse como

$$\frac{V^2}{R} + fV - fV_g = 0.$$

Por lo tanto el cociente entre el viento gradiente y el geostrófico es

$$\frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR} = 1 + R_o$$

por lo que para el flujo ciclónico ($Rf > 0$) el viento geostrófico es mayor que el viento gradiente, y para flujo anticiclónico ($Rf < 0$) el viento geostrófico es menor que el viento gradiente. Además, de la ecuación anterior se ve que en sistemas de latitudes medias la diferencia entre el viento geostrófico y el de gradiente es del orden del número de Rossby el cual es, en general menor 0.1-0.2, por lo que la diferencia entre vientos es 10-20%. La ecuación anterior también indica que los flujos en bajas anómalas antibáricas ($V_g < 0$) pueden existir sólo si $V/fR < -1$, o sea que está asociado a vórtices de pequeña escala. En los trópicos $Ro \sim 1-10$ y se debe aplicar el viento gradiente en lugar del geostrófico.

Si consideramos el viento gradiente como el viento real entonces el viento ageostrófico es

$$V_{ag} = V - V_g = -\frac{V^2}{fR}$$

y es paralelo al viento total en cada punto. Puesto que en regiones con curvatura el viento real está mejor descrito por el viento gradiente que por el geostrófico podemos decir que el flujo real es **subgeostrófico** en las vaguadas y **supergeostrófico** en las cuñas. De acuerdo a la figura 4.24 habrá convergencia a la izquierda de la vaguada y divergencia a su derecha.

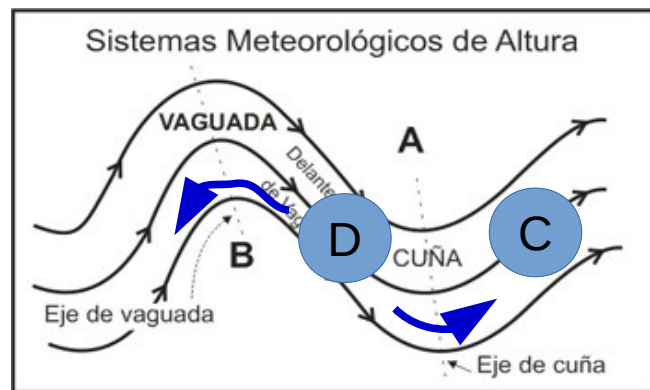


Figura 4.24– Flechas curvas azules representan en forma esquemática el viento ageostrófico en altura en el H.S. Las letras C y D marcan regiones de convergencia y divergencia, respectivamente.

Por la ecuación de continuidad la divergencia en altura debe estar acompañada por convergencia en niveles bajos de la columna (ver 4.1.2). Este movimiento vertical

ascendente es responsable de la producción de nubes, precipitación y un mínimo de la presión en superficie asociada al ciclón. Por el contrario, la convergencia en altura al este de la cuña debe estar acompañada por movimiento descendente y divergencia de la columna en superficie. Este movimiento vertical es responsable de cielos claros y un máximo de presión en superficie asociado al anticiclón.

4.3.4 Viento antitróptico

En el caso de que exista fricción la ecuación a lo largo de la trayectoria se escribe de la forma

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-\partial \phi}{\partial s} - k_s V$$

y existe un flujo estacionario llamado **antitróptico** en el cual la fuerza del gradiente de presión es balanceada por la fricción

$$V = \frac{-1}{k_s} \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

y el flujo es en dirección perpendicular a los contornos de geopotencial (figura 4.25). Este tipo de flujo es poco común pues ni Coriolis, ni el gradiente de presión en la dirección según **n**, ni la fuerza centrífuga, ni la aceleración tangencial juegan papeles importantes. Esto implica que el flujo debe ser de pequeña escala o que ocurra cercano al ecuador. La curvatura del flujo también debe ser nula. Un flujo que se asemeja al antitróptico es el viento en un valle. Las montañas a cada lado no permiten que Coriolis tenga efecto y el viento tiende a ir de alta a baja presión.

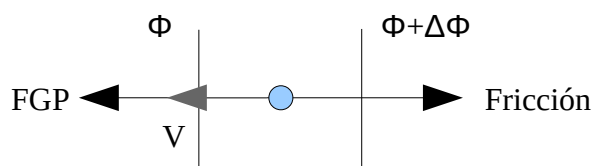


Figura 4.25 – Esquema de flujo antitróptico

— Resuelva Ejercicios 7 al 12 del Práctico 3 —

4.4 Trayectorias y líneas de corriente

En el sistema de coordenadas naturales, $s(x,y,t)$ fue definido como la distancia a lo largo de la curva en el plano horizontal marcada por el camino de una parcela de aire, o sea por su **trayectoria**. Por lo tanto, el radio de curvatura R referido en el viento gradiente es el radio de curvatura de la trayectoria de una parcela. En la práctica, R se estima usando el radio de curvatura de los contornos de la altura de geopotencial ya que es fácil de estimar con la carta sinóptica. El problema reside en que los contornos de altura son **líneas de corriente** del viento gradiente, o sea líneas que son paralelas a la velocidad del viento en cada instante. Mientras que las trayectorias marcan el movimiento de la parcela sobre un tiempo finito, las líneas de corriente muestran “una foto” del campo de velocidades en cada instante. Así, trayectorias y líneas de corriente en general no coinciden.

En coordenadas cartesianas las trayectorias horizontales están determinadas integrando la ecuación

$$\frac{ds}{dt} = V(x, y, t)$$

en un período de tiempo, mientras que las líneas de corriente están determinadas integrando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, t_0)}{u(x, y, t_0)}$$

con respecto a x a tiempo t_0 . Únicamente para flujos estacionarios coinciden estas dos cantidades. No obstante, los sistemas sinópticos no son movimientos estacionarios; en general se mueven a velocidades similares al viento que circula por ellos. Pensemos por ejemplo en un ciclón que tiene una velocidad de desplazamiento de 5-10 m/s y los vientos que giran a su alrededor tienen velocidades del mismo orden: a medida que los vientos giran alrededor del centro del ciclón, el ciclón se va moviendo lo cual resulta en una trayectoria que no es circular como ocurriría si el ciclón estuviera quieto (o inferiríamos de una foto).

A continuación derivamos una ecuación que relaciona los radios de curvatura asociados a la trayectoria y a las líneas de corriente para determinar los errores cometidos al usar la curvatura calculada usando la altura del geopotencial en el cálculo del viento gradiente. Consideremos un sistema de (alta o baja) presión moviéndose y sea $\beta(x,y,t)$ la dirección angular del viento en cada punto en una isóbara, mientras que R_t y R_s designan los radios de curvatura de la trayectoria y líneas de corriente, respectivamente. Entonces

de la figura 4.26 $\delta s = R \delta \beta$ y en el límite $\delta s \rightarrow 0$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{R_t}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{1}{R_s}$$

donde $\frac{d\beta}{ds}$ es el cambio en la dirección del viento a lo largo de la trayectoria (positivo para flujo antihorario) y $\frac{\partial\beta}{\partial s}$ es el cambio en la dirección del viento a lo largo de las líneas de corriente en cada instante. Notar que se usa la derivada total (lagrangiana) en el primer caso pues la trayectoria representa el cambio en la dirección del viento siguiendo la parcela, mientras que para una línea de corriente se usa la derivada parcial ya que describe la razón de cambio local en la dirección del viento.

Podemos escribir

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{V}{R_t}$$

y, expandiendo la derivada total

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + V \frac{\partial\beta}{\partial s} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{V}{R_s}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = V \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_s} \right)$$

de donde se ve que R_t y R_s coinciden sólo si la razón de cambio local en la dirección del viento es nula, o sea cuando el flujo es estacionario.

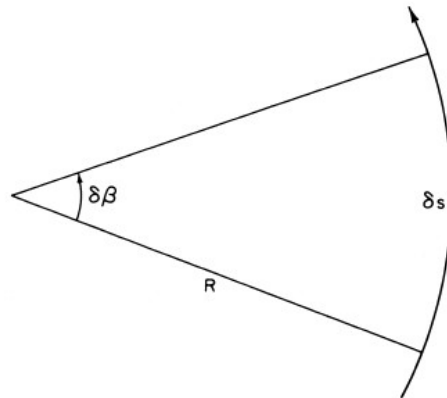


Figura 4.26 – Relación entre el cambio en la dirección angular del viento y el radio de curvatura del flujo.

En general, los sistemas sinópticos en latitudes medias se mueven hacia el este como resultado de la advección de los vientos del oeste en altura. En esos casos existe un cambio local en la dirección del viento debido al movimiento del sistema aún si la forma no cambia. La relación entre R_t y R_s en ese caso puede determinarse considerando un patrón circular de contornos de altura moviéndose a velocidad constante C . En este caso el cambio en la dirección del viento es debido al movimiento de la línea de corriente y vale

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\vec{C} \cdot \nabla \beta = -|\vec{C}| \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \gamma = \frac{-|\vec{C}|}{R_s} \cos \gamma$$

donde γ es el ángulo entre las líneas de corriente (contornos de altura) y la dirección del movimiento. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{-|\vec{C}|}{R_s} \cos \gamma &= \frac{V}{R_t} - \frac{V}{R_s} \\ \frac{V}{R_t} &= \frac{1}{R_s} (V - |\vec{C}| \cos \gamma) \\ R_t &= R_s \left(1 - \frac{|\vec{C}| \cos \gamma}{V} \right)^{-1} \end{aligned}$$

La figura 4.27 muestra dos casos (a) $V=2C$, y (b) $V=C/2$ en el H.N. y se observa que la curvatura de las trayectorias puede ser bien diferente de la curvatura calculada usando el contorno de altura. Puesto que los sistemas de presión en latitudes medias se mueven a

velocidades comparables a la velocidad del viento, el viento gradiente calculado usando la curvatura de los contornos de altura no es una mejor aproximación al viento real que el viento geostrófico.

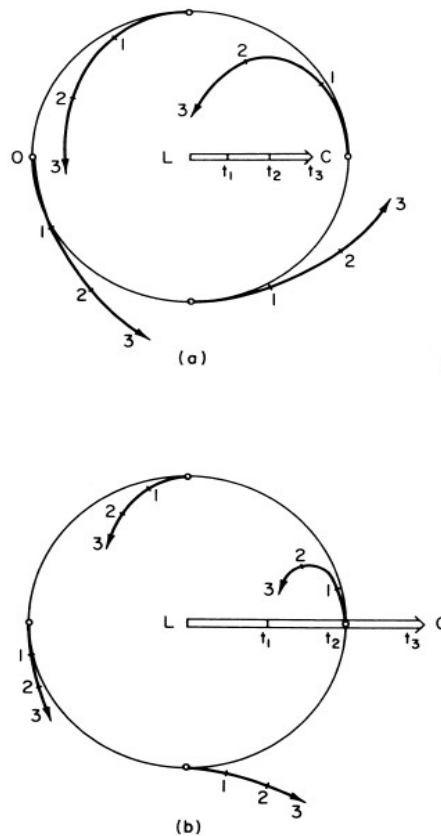


Figura 4.27 – Trayectorias para sistemas ciclónicos circulares moviéndose con velocidad C en el H.N. (a) $V=2C$, (b) $V=C/2$. Los números indican la posición en tiempos sucesivos.

4.5 Comentarios sobre técnicas para construir líneas de corriente y trayectorias

Como vimos más arriba, en general se usan las alturas de geopotencial como líneas de corriente. Otras veces se construyen a partir de los vectores de viento trazando líneas que sean tangentes a los vectores, lo cual es especialmente útil en los trópicos donde las isóbaras (y contornos) están muy espaciadas debido a una fuerza de Coriolis muy débil. Los puntos de partida de las líneas de corriente son seleccionados en forma conveniente

basado en la experiencia del analista. Como cualquier isópleta los detalles no pueden exceder la información de los datos: longitudes de onda menores a 2 veces la distancia entre estaciones próximas no pueden ser representadas y por lo tanto estas ondas deben ser evitadas. Líneas de corriente que “desaparecen”, quedan truncas o convergen, indican que el aire desaparece del nivel considerado por lo que indica un viento vertical.

La figura 4.28 muestra un ejemplo donde las líneas de corriente fueron hechas a mano basado en los vectores de viento. Las líneas son paralelas al flujo y a veces se deja de lado viento muy débil, pues es fácilmente influenciado por fenómenos de pequeña escala no representativos de los procesos de gran escala. La figura muestra la existencia de dos frentes donde terminan las líneas de corriente y donde el viento tiene una discontinuidad. Es usual el dibujo de las líneas como terminando en los frentes sugiriendo convergencia. La convergencia no es siempre discontinua. Un ejemplo se da en la parte noroeste del mapa donde convergen el flujo de una alta con el flujo que viene del norte. Hoy día, las líneas de corriente son generadas por computadora (figura 4.29).

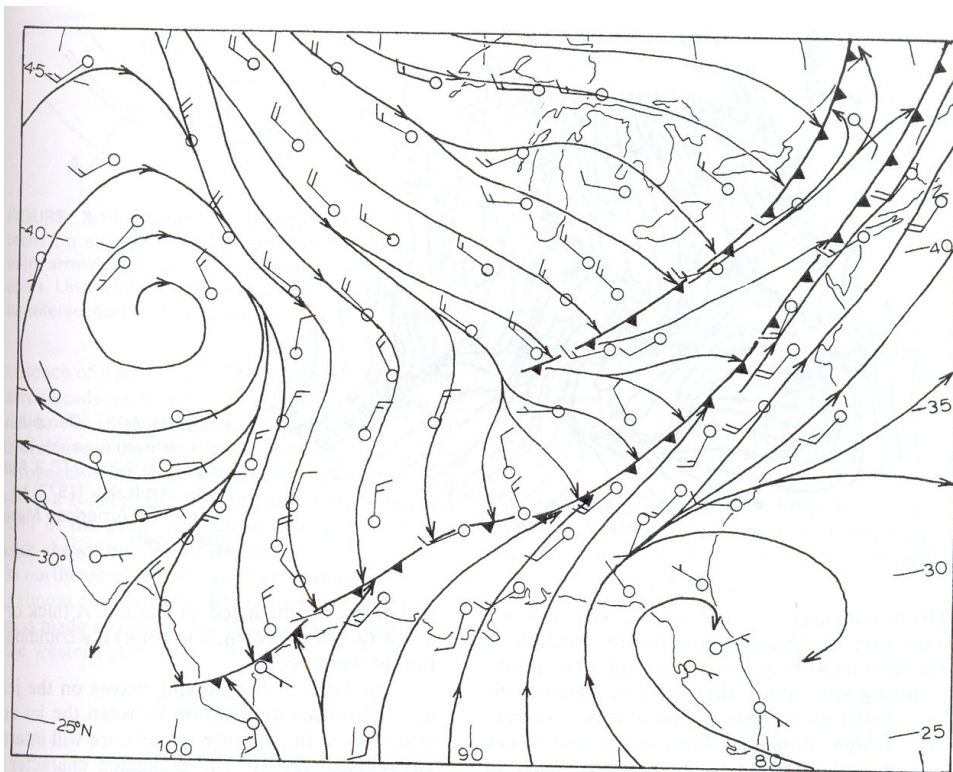


Figura 4.28 – Ejemplo de trazado a mano de líneas de corriente usando vectores de viento en superficie.

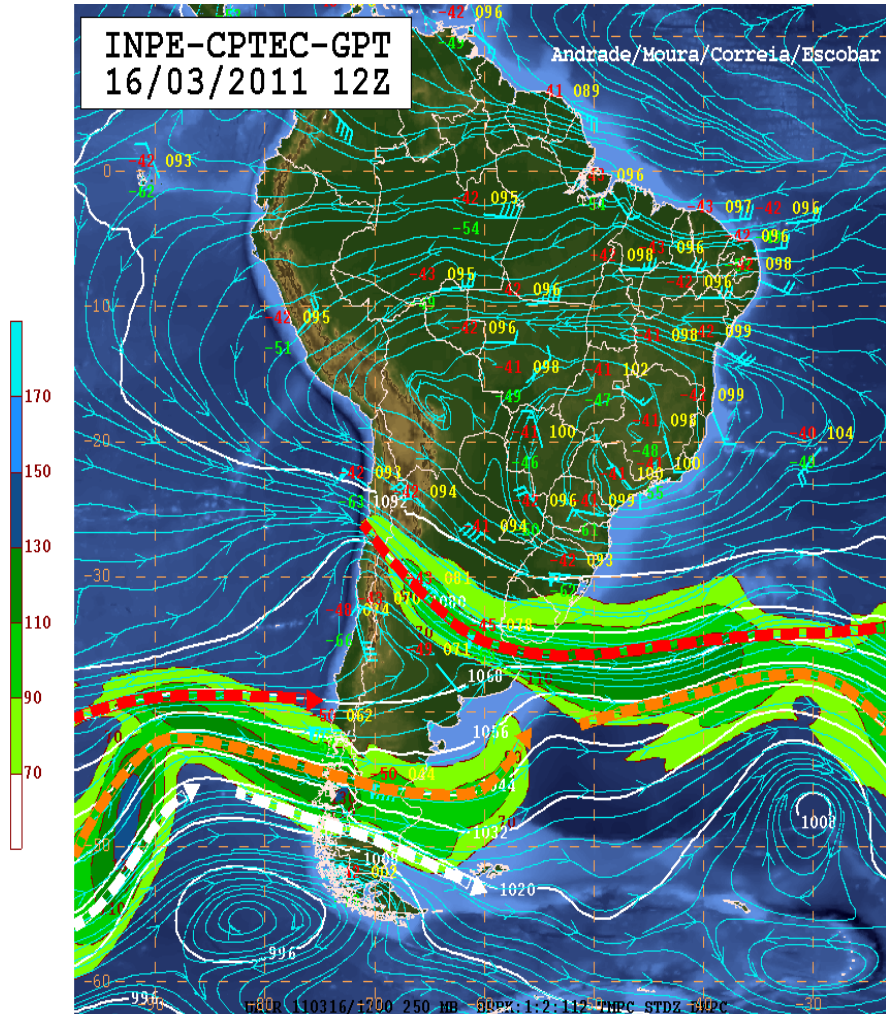


Figura 4.29 – Líneas de altura de geopotencial y líneas de corriente en 250 mb.

Por otro lado, la construcción de trayectorias implica realizar una integración del campo de velocidades. Consideremos el caso unidimensional

$$V(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt \approx x(t_0) + \frac{(t_1 - t_0)}{2} (V(t_0) + V(t_1))$$

la cual implica conocer la velocidad de antemano para conocer la trayectoria. Operacionalmente, esto implica resolver la ecuación iterativamente pues no es posible conocer el viento antes de que ocurra. Otra complicación es que aunque los movimientos verticales son mucho menores que los horizontales pueden causar grandes errores en el cómputo de las trayectorias: cuando la parcela cambia de nivel se mueve con una velocidad horizontal diferente a la que usamos al calcular la trayectoria. Por último, en general estamos interesados en el movimiento de una parcela finita de aire y no en el movimiento de un punto material. Dado que el volumen usualmente se deforma drásticamente con el flujo esto implica un considerable aumento en la complejidad del cálculo.

Apéndice

Otra forma de derivar la fuerza gradiente de presión en coordenadas de presión es la siguiente. Considere dos sistemas de coordenadas (a) el que tiene como variables independientes a x, y, z, t , (b) el que tiene como variables independientes a x, y, s, t , donde s es una coordenada generalizada $s=s(x, y, z, t)$.

Asumimos que existe una relación monótonica entre s y z cuando x, y, t están fijos. Entonces, es posible invertir la ecuación para s y hallar $z=z(x, y, s, t)$.

Cualquier función escalar A en el espacio de 4-dimensiones puede ser expresada en dos formas dependiendo de la elección de la coordenada vertical. Por lo tanto, la derivada parcial de A con respecto a c (donde c puede ser x , y ó t) es generalmente diferente y existe la siguiente relación

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_s = \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_s$$

donde el subíndice indica la coordenada vertical mantenida constante en la diferenciación. Usando la relación

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) \frac{\partial A}{\partial s}$$

se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_s = \left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)_z + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_s$$

Si elegimos $c=z$, $A=p$ y $s=p$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p$$

La derivada a la izquierda de la ecuación es nula, y usando la ecuación hidrostática se obtiene

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z - \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p$$

o sea

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_p$$

La derivación es análoga para la dirección y . Recuperamos entonces la expresión para la fuerza gradiente de presión horizontal en coordenadas de presión derivada en la sección 4.1

Referencias

- An Introduction to Dynamical Meteorology, Holton, 2004.
- Mid-Latitude Atmospheric Dynamics, Martin, 2006.
- Synoptic-dynamic meteorology in mid-latitudes, Bluestein, 1992.
- N. Li (2016): A discussion on the existence of the anomalous high and anomalous low. Ann. Geophys. 33, 1253-1261. <https://www.ann-geophys.net/33/1253/2015/angeo-33-1253-2015.pdf>
- M. Hollis (2019): Categorizing various types of atmospheric flow in multidecadal global weather data. FSU Bsc. Thesis. <https://diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu:667277/datastream/PDF/view>