

9. Ondas en el océano

Hasta ahora consideramos la circulación oceánica estacionaria. No obstante, el océano está continuamente ajustándose a los forzantes, ya sea a los vientos, flujos de calor o masa (además del gravitacional por otros cuerpos celestes), y ese proceso se realiza a través de la propagación de ondas. Consideraremos el caso de ondas largas y lentas para las cuales $Ro < 1$ y es necesario considerar los efectos de la rotación terrestre. Hay tres tipos de ondas en el océano que son de particular interés: ondas de Kelvin, ondas gravito-inerciales y ondas de Rossby. El objetivo de esta sección es describir estos tres tipos de onda considerando las ecuaciones de un océano homogéneo ya que son aquellas que intervienen en procesos de ajuste oceánico de gran escala.

Un ejemplo de ajuste es el establecimiento de la circulación profunda debido a la formación de aguas profundas en altas latitudes. De acuerdo al modelo de Stommel y Arons la solución estacionaria es de la forma dada por la figura 9.1.

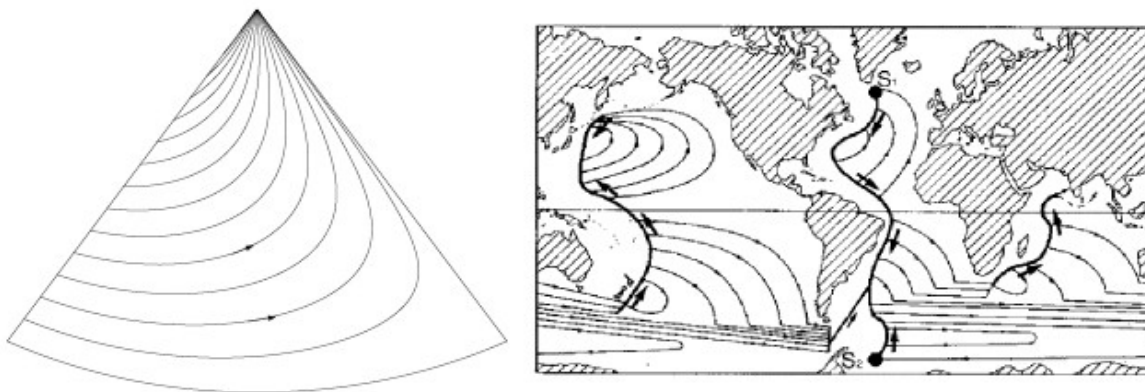


Figura 9.1

¿Como se establece esa circulación si comenzamos desde un océano en reposo y de repente se comienza a formar aguas profundas? El problema fue estudiado por Kawase (1987) y por Johnson & Marshall (2002). El transitorio desde el reposo se muestra en la figura 9.2 para varios tiempos. Se observa la propagación de una onda costera desde el norte a lo largo de la frontera oeste de la cuenca, luego se propaga sobre el ecuador, alcanza la frontera este y luego se propaga hacia el norte y sur a lo largo de la frontera este. Finalmente el interior oceánico se ajusta desde la costa este, siendo el ajuste más rápido cerca del ecuador que en latitudes altas donde demora años. Notar que por equilibrio geostrófico lejos de las fronteras la circulación es paralela a las líneas de igual profundidad y por lo tanto es similar a la circulación de la Fig 9.1. Claramente hay dos tipos de onda que realizan el ajuste y sus propiedades de propagación son muy diferentes. Veremos más abajo que las ondas de Kelvin propagan la señal a lo largo de las fronteras y las ondas de Rossby lo hacen hacia el interior oceánico.

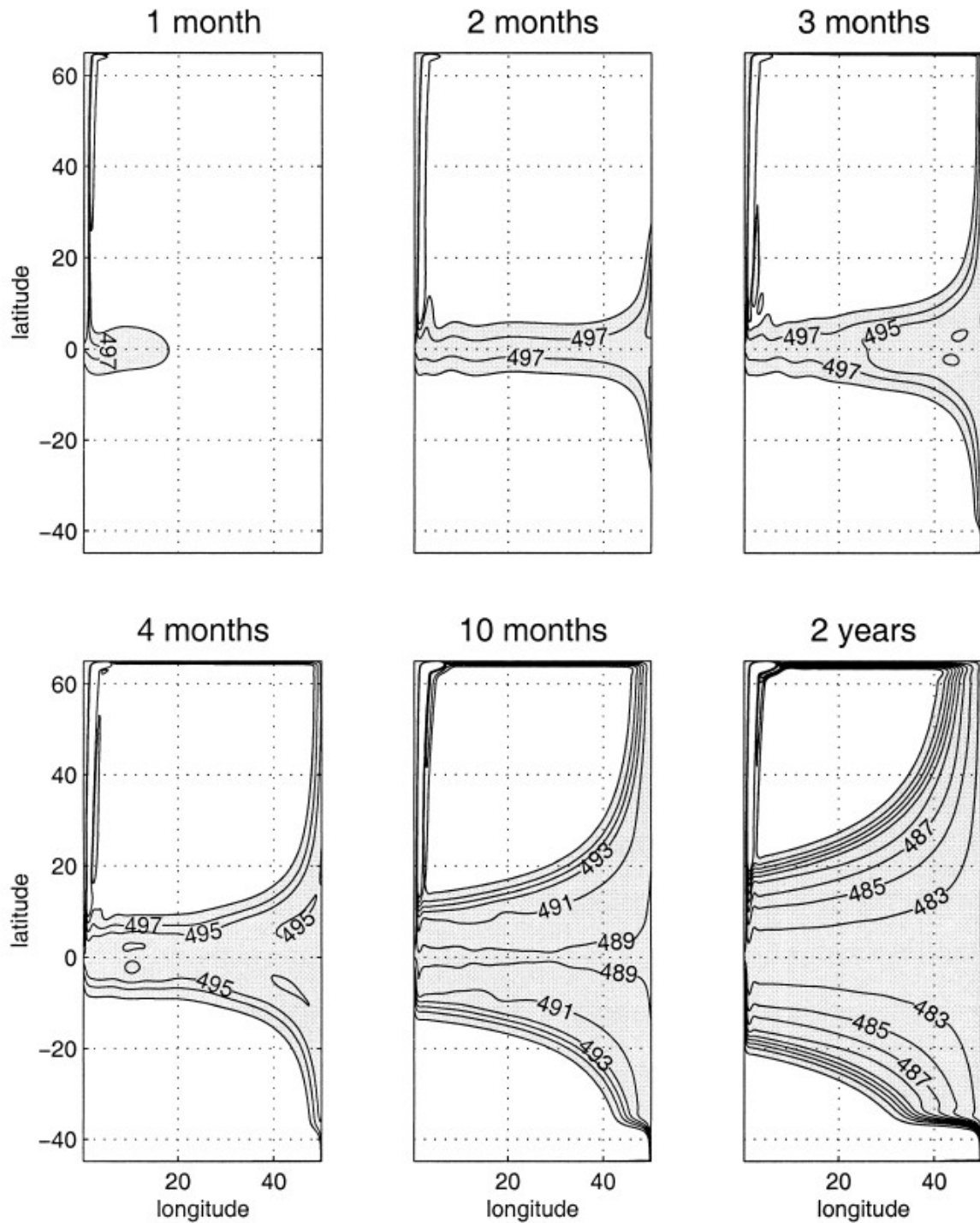


FIG. 2. Surface layer thickness after a thermohaline overturning of 10 Sv is switched on at time $t = 0$ in the northwest corner of an ocean initially at rest. There is no wind forcing, and the surface layer is initially 500 m deep. The contour interval is 2 m, and thicknesses less than 499 m are shaded. Note that the thickness anomaly on the western boundary is much greater than that in the interior (the layer thickness is approximately 350 m in the northwest corner of the domain; see Fig. 3 for details), but extra contours are not plotted here. The southernmost 10° of the domain comprises the sponge region, where we might expect the dynamics to be somewhat unrealistic.

Figura 9.2 – De Johnson & Marshall (2002)

9.1 Ondas en un océano homogéneo - Modelo de aguas someras lineal

Para estudiar las ondas someras, o también llamadas barotrópicas, consideraremos un océano homogéneo cuyo flujo horizontal es independiente de la profundidad (figura 9.1).

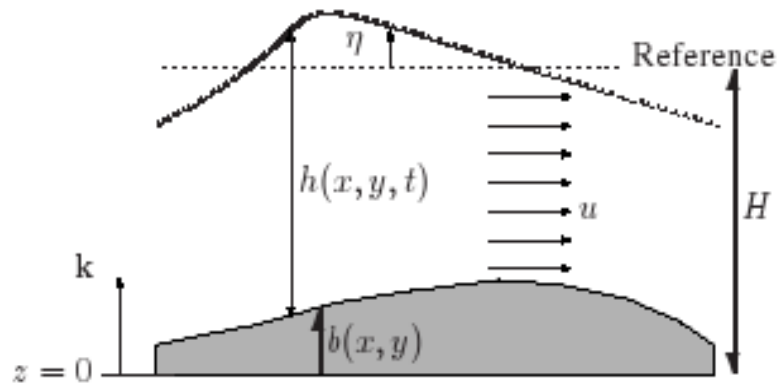


Figura 9.3 – Esquema de flujo de aguas someras.

Además, se considera el caso de número de Rossby pequeño

$$Ro = \frac{U}{\Omega L} \ll 1.$$

lo cual implica considerar flujos lentos, de escala horizontal grande y de rotación rápida. De esta forma los términos no lineales de las ecuaciones son despreciables.

Por otro lado consideramos flujos con número temporal de Rossby del orden de la unidad

$$Ro_T = \frac{1}{\Omega T} \sim 1.$$

para mantener las aceleraciones locales.

La combinación de Ro y Ro_T implica considerar flujos lentos de evolución rápida (vale que $L/T \gg U$). O sea que consideraremos fenómenos ondulatorios para los cuales la transmisión de información ($C=L/T$ es la velocidad de la onda) es mucho más rápida que el movimiento de las partículas materiales (U).

Recordemos que los números de Rossby se pueden definir basado en la componente local de la rotación terrestre como $Ro = \frac{U}{fL}$, $Ro_T = \frac{1}{fT}$.

Como el flujo horizontal es independiente de la profundidad es posible integrar la ecuación de continuidad en la vertical:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int_b^{b+h} dz + [w]_b^{b+h} = 0, \tag{9.1}$$

donde b es la batimetría y h es el espesor del fluido.

Dado que las partículas de fluido en la superficie no pueden escaparse y las partículas en el fondo no pueden penetrar la batimetría, las velocidades verticales están dadas por

$$\begin{aligned} w(z = b + h) &= \frac{\partial}{\partial t}(b + h) + u \frac{\partial}{\partial x}(b + h) + v \frac{\partial}{\partial y}(b + h) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ w(z = b) &= u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Usando la altura de superficie

$$\eta = b + h - H \tag{9.3}$$

la ecuación de continuidad integrada se obtiene

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0, \tag{9.4}$$

Notemos que esta forma de la ecuación de continuidad elimina la velocidad vertical del formalismo e introduce una nueva variable η .

Para linealizar la ecuación de continuidad expandimos

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \tag{9.5}$$

considerando que el fondo es plano ($b=0$). Si ΔH es la escala vertical del desplazamiento de la superficie libre η se obtiene que los términos de la ecuación anterior son del orden de

$$\frac{\Delta H}{T}, U \frac{\Delta H}{L}, H \frac{U}{L}, \Delta H \frac{U}{L}.$$

Pero como $L/T \gg U$ y $\Delta H \ll H$ es posible despreciar todos los términos excepto el tercero.

Puesto que el fluido es homogéneo la presión dinámica p es independiente de la profundidad (ecuación hidrostática). Por otro lado, en ausencia de una presión atmosférica constante sobre la superficie oceánica la presión dinámica p en el nivel “Reference” (figura 9.1) está dada por

$$p = \rho_0 g \eta, \quad (9.6)$$

o sea por el peso del fluido por encima de ese nivel, y por lo anterior vale para todo nivel z .

Sustituyendo p en las ecuaciones de momento (y despreciando los términos no-lineales) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (“**modelo de aguas someras lineal**”)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned}$$

(9.7)

que gobierna la dinámica lineal de ondas en un océano homogéneo, con fondo plano y sin fricción.

9.1.1 Ondas de Kelvin

La onda de Kelvin es una perturbación que requiere el soporte de una frontera lateral, como por ejemplo la costa de un continente.

Para estudiar este tipo de ondas consideraremos un océano de forma rectangular con un continente en uno de sus lados, por ejemplo en $x=0$, que consideraremos como la frontera oeste (ver figura 9.2). En esta frontera la velocidad normal debe ser nula ($u=0$) pero la ausencia de fricción permite una velocidad tangencial meridional (v). Aquí consideraremos que la velocidad $u=0$, no sólo en la frontera sino en todos lados.

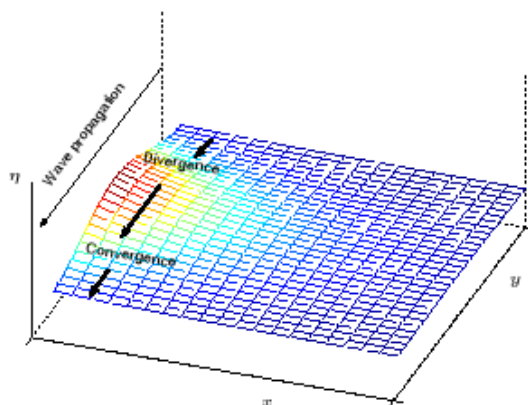


Figura 9.4 – Esquema de onda de Kelvin con desplazamiento positivo de la superficie. Supongamos que y indica la dirección norte y x la dirección este.

En este caso las ecuaciones del modelo de aguas someras linealizado quedan

$$\begin{aligned} -fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{9.10}$$

o sea que las corrientes en dirección paralela a la costa asociadas a las ondas estarán en equilibrio geostrofico. Como existe solamente equilibrio geostrofico en una dirección, el movimiento se dice semi-geostrofico.

Usando las últimas dos ecuaciones de 9.10 para eliminar la velocidad meridional

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ c^2 &= \sqrt{gH} \end{aligned} \tag{9.11}$$

La ecuación anterior gobierna la propagación de ondas no-dispersivas uni-dimensionales y tiene la solución general

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ v &= \sqrt{gH} F(y + ct) e^{-x/R} \\ \eta &= -H F(y + ct) e^{-x/R}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

donde F es un función cualquiera (por ej. \cos) y donde la longitud R está definida como

$$R = \frac{\sqrt{gH}}{f} = \frac{c}{f} \quad (9.13)$$

Se observa entonces que la amplitud de la onda decrece exponencialmente al alejarse de la frontera con una escala horizontal dada por R , que ya definimos como *Radio de deformación de Rossby (barotrópico)*.

Notar que en el límite de $f \rightarrow 0$, R se hace infinitamente grande por lo que la onda deja de estar atrapada y se reduce a una onda de gravedad con crestas y valles orientadas en forma perpendicular a la costa.

El sentido de propagación de la onda de Kelvin depende del hemisferio. Aquí consideramos $f > 0$ y obtenemos que las líneas de fase constante cumple $y+ct=cte$, o sea que $y=-ct+cte$, por lo que el sentido es hacia el sur en la frontera oeste. En regla general la onda de Kelvin se propaga de tal forma de tener la frontera a la derecha del sentido de propagación en el H.N., y a la izquierda en el H.S.

Las ondas de Kelvin pueden ser forzadas por marejadas asociadas a tormentas, o por variaciones de los vientos a lo largo de las costas. Además, estas ondas son esenciales para describir las mareas. Para un océano profundo ($H=5000$ m) en latitudes medias, el radio de deformación de Rossby es cercano a 3000 km. Como la plataforma continental se extiende unos 100 km “offshore”, a esta escala el talud continental es prácticamente indistinguible de una frontera vertical. Por lo tanto, una onda de Kelvin barotrópica se extiende muy lejos de la costa y ocupa una fracción sustancial de una cuenca oceánica típica. Por otro lado, para mares someros y regiones costeras R es del orden de 200 km.

9.1.2 Ondas gravito-inerciales o de Poincare

Consideremos ahora las ecuaciones del modelo de aguas someras linealizado sin simplificaciones adicionales. No hay fronteras y tampoco $u=0$. Se considera f constante; mas adelante veremos cómo cambian las soluciones cuando f depende de la latitud.

Consideremos un dominio infinito y busquemos soluciones de ondas planas que se propagan en la dir- x . Por lo tanto las crestas de las ondas estaran alineadas a la dir- y y se cumple

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad . \text{ Por lo tanto 9.7 se reduce a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f v &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Tomando la derivada temporal de la primera ecuación de 9.14 y sustituyendo la 2da y 3ra ecuación de 9.14 se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f^2 u = gH \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.15)$$

Imponiendo soluciones del tipo $u = u_0 e^{i(\kappa x - \omega t)}$ en 9.15

se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = f^2 + gH \kappa^2 \quad (9.16)$$

y se muestra en la figura 9.5.

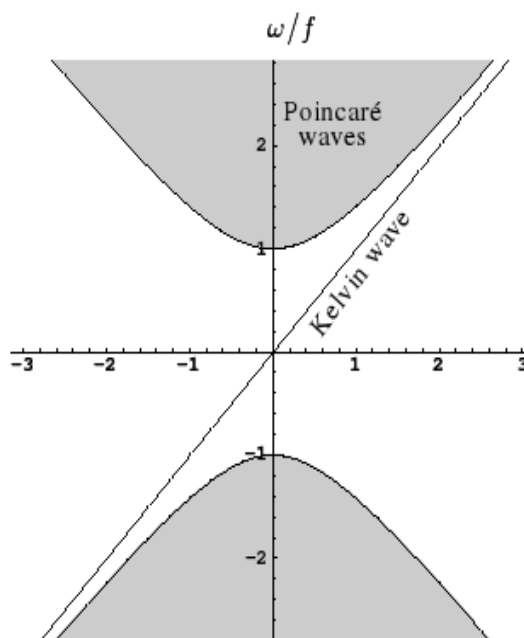


Figura 9.5 – Relación de dispersión de las ondas de Poincare y de Kelvin para $f = \text{cte}$. El eje x es κR .

Las soluciones cumplen

$$\omega = \mp \sqrt{f^2 + gH \kappa^2} \quad (9.17)$$

que corresponden a ondas viajeras llamadas ondas de Poincare.

Notar que:

- la frecuencia es siempre mayor que la inercial ($\omega > f$).

- en el límite $f \rightarrow 0$ la frecuencia está dada por $\omega = \kappa \sqrt{gH}$, la velocidad de fase es $c = \omega / \kappa = \sqrt{gH}$, o sea que son ondas gravitatorias de superficie.
- en el límite de longitudes de ondas menores al radio de deformación de Rossby $\kappa^2 \gg f^2 / gH$ las ondas de Poincare se comportan como ondas gravitatorias de superficie en un fluido que no rota. En ese límite las ondas son tan cortas que no sienten la rotación.
- en el límite de longitudes de onda largas $\kappa^2 \ll f^2 / gH$ los efectos de la rotación dominan y $\omega \sim f$. En este límite la estructura del flujo es lateralmente uniforme y todas las parcelas se mueven al unísono, cada una describiendo un círculo inercial con radio V/f donde V es el módulo de la velocidad.
- estas ondas son dispersivas pues $c=c(k)$.

Como las ondas de Poincare exhiben características de ondas gravitatorias y de ondas inerciales, se las llama ondas gravito-inerciales.

Como la velocidad u debe ser real $u = \Re(u_0 e^{i(\kappa x - \omega t)}) = u_0 \cos(\kappa x - \omega t)$. De la 2da y 3ra ecuacion de 9.14 se puede obtener v y η

$$v = \frac{f u_0}{\omega} \sin(\kappa x - \omega t)$$

$$\eta = \frac{H u_0 \kappa}{\omega} \cos(\kappa x - \omega t)$$
(9.18)

De esta solución podemos ver que la rotación terrestre solo afecta la componente v de la onda, o sea la perpendicular a la dirección de propagacion. En la direccion x la onda es idéntica a una onda gravitatoria de aguas someras.

Para el caso $\omega/f=2$ la figura 9.6 muestra la evolución temporal de las velocidades horizontales

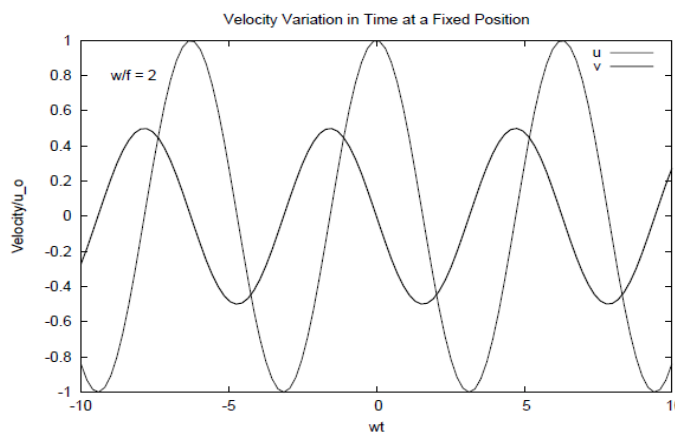


Figure 9.6 – Velocidad horizontal en el tiempo para una posición fija en HN.

Por lo tanto las trayectorias horizontales de las parcelas son elipses con ejes mayores en la dirección del vector número de onda (Figura 9.7). La razón de los ejes de la elipse es ω/f , o sea que la componente perpendicular a la dirección de movimiento es significativa si $\omega \neq f$.

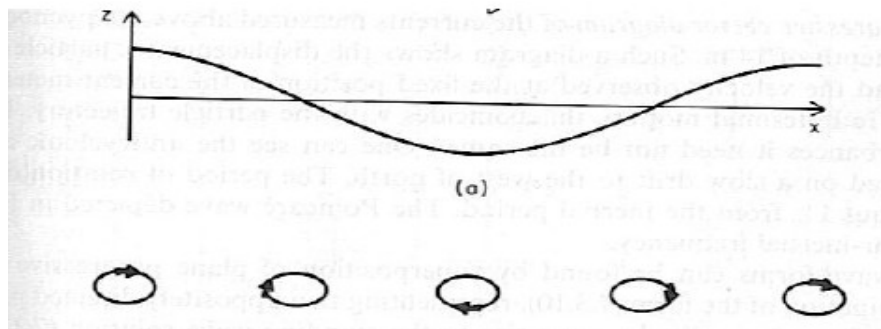


Figura 9.7 – Onda de Poincaré propagándose hacia la derecha. Arriba muestra la elevación de la superficie, y abajo se muestra la trayectoria de las parcelas vista desde arriba. Las parcelas se mueven en sentido anticiclónico. Las flechas marcan la posición de la parcela de acuerdo a la elevación de la superficie (H.N.).

9.1.3 Ondas de Rossby

Para estudiar las ondas de Kelvin y de Poincaré se consideró f constante, o en forma equivalente, se consideró que el movimiento meridional de las parcelas es relativamente chico. Esa es la aproximación del plano- f , que considera que el movimiento se desarrolla en un plano tangencial a la superficie terrestre. Movimientos ondulatorios de gran extensión meridional, como por ejemplo los meandros en la corriente del Golfo, deben ser descritos considerando la esfericidad terrestre. Esto es, es necesario considerar que el parámetro de Coriolis f depende de la latitud. En este caso la aproximación se denomina plano- β aunque ya no describe la dinámica en un plano.

Considerando una latitud de referencia θ_0 , se puede aproximar f como

$$f = f_0 + \beta_0 y$$

Notar que esta aproximación es válida para movimientos meridionales de longitud característica L que satisfacen

$$\frac{\beta_0 L}{f_0} \ll 1$$

Considerando el plano- β el modelo de aguas someras queda de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - (f_0 + \beta_0 y)v &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (f_0 + \beta_0 y)u &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (9.19)$$

Como sabemos, el balance de primer orden es el geostrofismo, por lo tanto estas ecuaciones tienen términos relativamente grandes (f_0 , g y H) y términos mas chicos (β_0 y derivadas temporales). Considerar la derivada temporal “chica” es equivalente a considerar $Ro_T \ll 1$, o sea flujos de evolución lenta. Los términos “chicos”, que pueden considerarse como perturbaciones del equilibrio geostrofico, gobiernan la evolución de los movimientos ondulatorios.

Entonces, se tiene que a primer orden

$$\begin{aligned} u &\approx \frac{-g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ v &\approx \frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Usando esta aproximación para los términos mas chicos se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{g}{f_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - f_0 v - \frac{\beta_0 g}{f_0} y \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ +\frac{g}{f_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + f_0 u - \frac{\beta_0 g}{f_0} y \frac{\partial \eta}{\partial y} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (9.21)$$

lo cual despejando u y v :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{f_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + \frac{\beta_0 g}{f_0^2} y \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ v &= +\frac{g}{f_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{f_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - \frac{\beta_0 g}{f_0^2} y \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Estas igualdades muestran que las velocidades horizontales están compuestas por un primer término geostrofico y dos términos de menor orden ageostroficos que pueden considerarse

como perturbaciones del equilibrio geostrófico. El segundo término se denomina isalobárico (depende de tendencias en la presión o elevaciones en la superficie) y el tercero es debido al efecto de la esfericidad terrestre.

Sustituyendo en la ecuación de continuidad se obtiene una ecuación para la elevación de la superficie

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - R^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \eta - \beta_0 R^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (9.23)$$

donde R es el radio de deformación de Rossby $R=(gH)^{1/2}/f_0$.

Insertando una solución del tipo $\eta = \Re(\eta_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)})$ se obtiene la relación de dispersión

$$\omega = -\beta_0 R^2 \frac{k_x}{1 + R^2 (k_x^2 + k_y^2)} \quad (9.24)$$

Las ondas que verifican esta ecuación se denominan ondas de Rossby u ondas planetarias. Notemos que si $\beta_0=0$ la frecuencia de la onda es 0 y corresponde al balance geostrófico en el plano-f. Las ondas de Poincare no aparecen pues al considerar $Ro_T \ll 1$ estamos filtrando las soluciones de variación rápida (frecuencia $> f_0$).

La velocidad de fase de las ondas de Rossby es

$$c_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{-\beta_0 R^2}{1 + R^2 (k_x^2 + k_y^2)}$$

$$c_y = \frac{\omega}{k_y} = \frac{-\beta_0 R^2 k_x}{k_y [1 + R^2 (k_x^2 + k_y^2)]} \quad (9.25)$$

o sea que es siempre hacia el oeste. El signo de c_y no está determinado. Por lo tanto estas ondas pueden propagarse hacia el noroeste, hacia el oeste, o hacia el suroeste.

Para ondas muy largas, $R^2 k^2 \ll 1$, la velocidad de fase (y la de grupo) es

$$c = -\beta_0 R^2$$

por lo que son no-dispersivas, se propagan siempre hacia el oeste a la máxima velocidad permitida. Notar que su velocidad depende de la latitud, siendo mayor para latitudes menores.

Para ondas muy cortas $c_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{-\beta_0}{k_x^2 + k_y^2}$ y son dispersivas.

El mecanismo de propagación de las ondas de Rossby se puede ver claramente considerando la conservación de la vorticidad potencial. Asumamos un océano con fondo plano ($H=\text{cte}$) y consideremos que los desplazamientos de la superficie libre son pequeños. La figura 9.8 muestra el estado inicial de reposo del océano visto desde arriba sometido al gradiente de vorticidad planetaria (β), y un estado posterior en el cual fue perturbado superponiendo una perturbación ondulatoria.

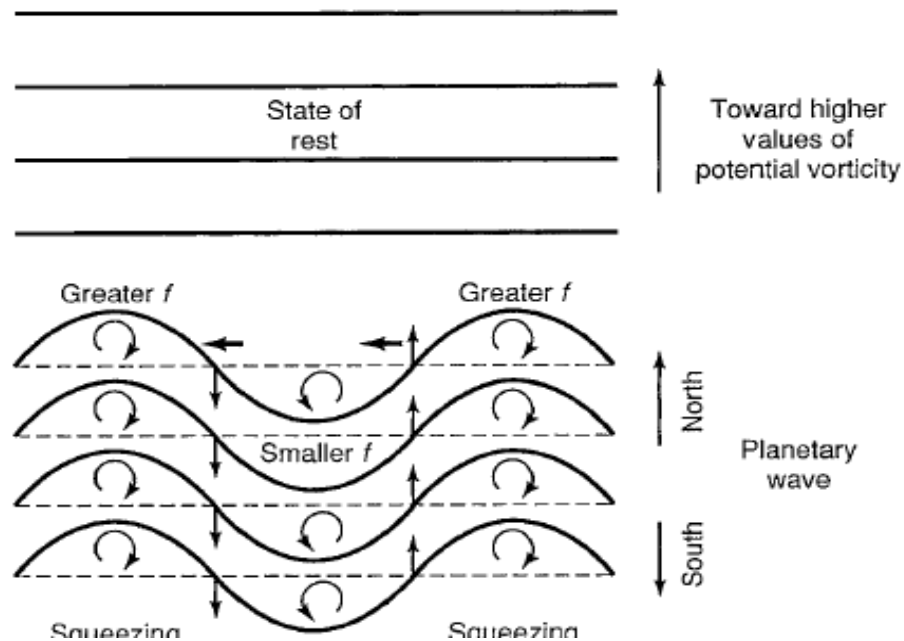


Figura 9.8 – Mecanismo de propagación de ondas de Rossby

En este esquema, para conservar $(f+c)$, las parcelas de fluido que fueron movidas hacia el norte y vieron incrementada su vorticidad planetaria, deberán adquirir vorticidad relativa negativa, o sea giro anticiclónico. Lo contrario ocurre para parcelas desplazadas hacia el sur. Como consecuencia las parcelas situadas en los nodos originales también tenderán a moverse en el sentido que indica la figura. De izquierda a derecha de la figura, los desplazamientos son hacia el sur de cresta a valle y hacia el norte de valle a cresta. Como movimientos hacia el sur generan valles y movimientos hacia el norte generan crestas, esto resulta en un movimiento hacia el oeste de todo el patrón de ondas. Por lo tanto, **para las ondas de Rossby, el mecanismo de restauración es el gradiente de vorticidad planetaria debido a la esfericidad terrestre** dado por β_0 . A diferencia de las ondas gravitatorias vistas en las secciones anteriores el movimiento de las partículas asociados a las ondas de Rossby es en el plano horizontal y no en el vertical.

9.2 Efectos de la estratificación

El océano está estratificado, es decir la densidad no es uniforme. En un océano homogéneo la rotación imparte al océano una fuerte tendencia al comportamiento columnar, o sea verticalmente rígido. Por el contrario un océano estratificado, que consiste en parcelas de fluido de diferente densidad tenderá a ajustarse bajos los efectos de la gravedad de tal forma que las densidades mayores estén por debajo de las densidades menores. Esta distribución en capas introduce un gradiente vertical en las propiedades del océano, por lo que la rigidez impuesta por la rotación se verá disminuída por la presencia de la estratificación. Por otro lado, la distribución vertical de densidad tenderá a impartir al océano una rigidez horizontal, o sea que tenderá a moverse a lo largo de superficies de densidad constante.

En el primer capítulo vimos que en un océano estratificado la estabilidad vertical está dada por

$$E = \frac{N^2}{g} \quad (9.26)$$

donde N es la frecuencia de Brunt-Vaisalla. La frecuencia de Brunt-Vaisala cuantifica la importancia de la estabilidad, y es una variable fundamental en la dinámica de fluidos estratificados. En terminos sencillos, esta frecuencia puede ser interpretada como la frecuencia vertical excitada por un desplazamiento vertical de la parcela de fluido. Por lo tanto, es la mayor frecuencia de las ondas internas en el oceano. Valores típicos de N son algunos ciclos por hora.

Recordemos que por definición N es

$$N^2 = - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}$$

De la misma forma que el número de Rossby indica cuando los efectos de la rotación son importantes en el movimiento, es posible derivar otro número adimensional que indica cuando los efectos de la estratificación son importantes. Se define el **número de Froude**

$$Fr = \frac{U}{NH} \quad (9.27)$$

y mide la importancia de la estratificación (U es la escala de velocidades horizontal característica y H la escala vertical del movimiento). Si $Fr < 1$ los efectos de la estratificación son importantes; cuanto mas chico es Fr mayor importancia tiene la estratificación en la dinámica oceánica.

En general, Fr se puede pensar como la velocidad horizontal de una parcela del fluido U sobre la velocidad de las ondas ($c=NH$).

Es posible definir otro número adimensional que caracteriza la importancia relativa de la

rotación y la estratificación en el movimiento del océano: el **número de Burger**

$$Bu = \left(\frac{NH}{\Omega L} \right)^2 = \left(\frac{Ro}{Fr} \right)^2 \quad (9.28)$$

En el océano $H \ll L$, pero en general también $\Omega \ll N$, por lo que Bu puede ser de $O(1)$, y en este caso la estratificación y la rotación son igualmente importantes en el movimiento oceánico. Si $Bu=O(1)$

$$L = \frac{NH}{\Omega} . \quad (9.29)$$

Este es el caso para escalas oceánicas típicas de $H=100$ m, $L=50$ km y recuperamos el **radio de deformación de Rossby interno** (ver sección 5.4).

9.2.1 Océano de dos capas- aguas someras

En una primera aproximación es posible considerar el océano como formado por un número finito de capas en movimiento ubicadas una sobre la otra, cada una con densidad uniforme. Cada capa está caracterizada entonces por una densidad, un espesor y la velocidad horizontal. El modelo mas simple que ilustra las ondas que ocurren cuando consideramos la estratificación oceánica es el modelo de 2 capas (figura 9.9). En este modelo se tiene una capa superior de densidad ρ_1 , altura h_1 y velocidad horizontal (u_1, v_1) sobre otra capa de densidad ρ_2 , altura h_2 y velocidad horizontal (u_2, v_2) .

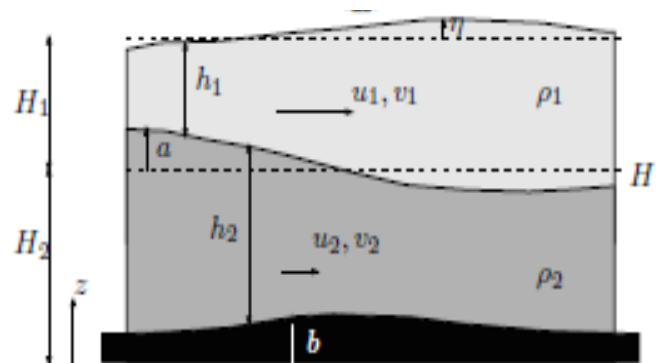


Figure 9.9 – Modelo de 2 capas oceánico.

Para derivar las ecuaciones del modelo se pueden tratar las capas en forma separada, lo cual resulta en ecuaciones similares al caso de 1 capa descrito en la sección 9.1. Por ejemplo, si consideramos fondo plano, la ecuación de conservación de masa para cada capa es

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + H_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + H_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{9.30}$$

donde ya se linearizó las ecuaciones.

El factor que acopla las capas es el gradiente horizontal de presión. Para hallar una expresión para la presión en cada capa usamos la ecuación hidrostática.

Si asumimos que el fondo es plano se obtiene para la capa superior

$$p_1 = g \rho_1 (h_1 + h_2 - z) \tag{9.31}$$

donde asumimos que la presión atmosférica es despreciable. Por lo tanto la presión en la interfase es

$$p_I = g \rho_1 h_1 \tag{9.32}$$

La presión en la capa inferior es

$$p_2 = p_I + g \rho_2 (h_2 - z) = g \rho_1 h_1 + g \rho_2 (h_2 - z) \tag{9.33}$$

Entonces es posible escribir

$$p_2 = p_1 + g' \rho_1 (h_2 - z) \tag{9.34}$$

donde $g' = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = g \frac{\Delta \rho}{\rho_1}$ es la **gravedad reducida**.

Introducimos ahora la elevación de la superficie y el desplazamiento vertical a de la interfase entre las dos capas

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 &= \eta + H \\ h_2 &= H_2 + a \end{aligned} \tag{9.35}$$

donde H y H_2 son constantes que representan el nivel medio en superficie y en la interfase, respectivamente. Usando 9.31, 9.34 y 9.35 es posible escribir los términos de presión en la dirección- x para las 2 capas de la forma

$$\begin{aligned} \text{capa 1: } \quad & \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \text{capa 2: } \quad & \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p_2}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - g' \frac{\partial a}{\partial x} \end{aligned}$$

donde ρ_0 se aproximó por la densidad de la capa superior (ρ_1). Sustituyendo estas expresiones, y análogas para los términos de presión en la dirección-y, en las ecuaciones de momento linealizadas (alrededor de un estado de reposo como en 9.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - fv_1 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + fu_1 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - fv_2 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - g' \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + fu_2 &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - g' \frac{\partial a}{\partial y} \end{aligned} \tag{9.36}$$

las cuales junto con (9.30) conforman el sistema de ecuaciones característico de un modelo de 2 capas linealizado. Notar que debido a la gravedad reducida la fuerza del gradiente de presión asociado a una perturbación en la interfase se ve reducido, así como también lo es la fuerza restitutiva gravitatoria de una onda que se propague en la interfase. Por lo tanto, los movimientos serán mucho más lentos en la interfase que en la superficie.

Para resolver el sistema de ecuaciones 9.30 y 9.36 consideremos soluciones de la forma

$$\begin{aligned} u_2 &= \lambda u_1 \\ v_2 &= \lambda v_1 \\ \eta &= \mu a \end{aligned} \tag{9.37}$$

o sea que las variables de una capa sean proporcionales a las variables de la otra capa. En este caso las ecuaciones de momento de la capa 2 son iguales a las de la capa 1 si

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{g\mu + g'}{g\mu} \tag{9.38}$$

mientras que la ecuación de continuidad de la capa 2 es igual a la de la capa 1 si

$$\frac{1}{\mu - 1} = \frac{H_2 \lambda}{H_1} \tag{9.39}$$

Eliminando μ entre las dos ecuaciones anteriores se obtiene una ecuación para λ

$$H_2 \lambda^2 + \left(H_1 - H_2 - \frac{g'}{g} H_2 \right) \lambda - H_1 = 0 \tag{9.40}$$

Despreciando el cociente $g'/g = \Delta\rho/\rho_1 \ll 1$ las soluciones son de la forma

$$\lambda = \frac{(H_2 - H_1) \pm (H_2 + H_1)}{2H_2} \quad (9.41)$$

El signo (+) de la ecuación resulta en $\lambda=1$, o sea un flujo verticalmente uniforme ($u_1=u_2$, $v_1=v_2$). El desplazamiento de la interface a está relacionado con la altura de la superficie libre por $a=\eta/\mu=H_2\eta/H$ y por lo tanto a tiene el mismo signo y es una fracción de η . Para este modo las capas se comportan como si tuvieran la misma densidad y se denomina **modo barotrópico**.

El signo (-) de la ecuación provee el otro modo con $\lambda=-H_1/H_2$, $H_2u_2=-H_1u_1$ y $H_2v_2=-H_1v_1$. El transporte de volumen integrado verticalmente es nulo para este modo. De la ecuación para λ se tiene que $\mu=-g'H_2/gH$ el cual es pequeño pues es del orden de la diferencia de densidades relativa $\Delta\rho/\rho_1$. Esto significa que la elevación de la superficie es pequeña comparada con el desplazamiento de la interface a . Para este modo, por lo tanto, el flujo se compensa verticalmente y la superficie es casi rígida. O sea que es un modo interno y se denomina **modo baroclínico**.

Las ecuaciones que gobiernan la evolución de cada modo separadamente se pueden obtener de la siguiente forma. Para el modo barotrópico se define $u_T=u_1=u_2$, $v_T=v_1=v_2$ y $a=H_2\eta/H$. Dentro de un error de orden $\Delta\rho/\rho_1$ las ecuaciones de momento se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_T}{\partial t} - f v_T &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_T}{\partial t} + f u_T &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (9.42)$$

mientras que la ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u_T}{\partial x} + H \frac{\partial v_T}{\partial y} = 0. \quad (9.43)$$

Dividiendo el tiempo entre $1/f$, la distancia entre L , y la velocidad entre U las ecuaciones de momento indican que la elevación de la superficie es de orden fLU/g . Sustituyendo esta escala en la ecuación de continuidad requiere que $f(fLU/g)$ sea similar a HU/L . Por lo tanto $L^2 \sim gH/f^2$, y se obtiene el radio de deformación de Rossby barotrópico (o externo)

$$R_{\text{external}} = \frac{\sqrt{gH}}{f} \quad (9.44)$$

En forma similar las ecuaciones gobernantes del modo baroclínico son obtenidas definiendo $u_B = u_1 - u_2$, $v_B = v_1 - v_2$ y $\eta = -(g'H_2/gH)a$. Sustrayendo las ecuaciones de momento y usando que $H_1 u_1 = -H_2 u_2$ se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_B}{\partial t} - f v_B &= +g' \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial v_B}{\partial t} + f u_B &= +g' \frac{\partial a}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.74)$$

mientras que sustracción de la ecuación de continuidad da

$$-\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial u_B}{\partial x} + \frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial v_B}{\partial y} = 0 \quad (7.75)$$

Para determinar el radio de deformación correspondiente dividimos el tiempo entre $1/f$, distancias entre L' y velocidad entre U' . De acuerdo a las ecuaciones de momento los desplazamientos de la interface son de orden $fL'U'/g'$. Sustituyendo esta escala en la ecuación de continuidad requiere $f(fL'U'/g') \sim H_1 H_2 U'/HL'$, o sea que $L'^2 = g'H_1 H_2 / f^2 H$. Por lo tanto el radio de deformación de Rossby baroclínico (o interno) es

$$R_{\text{internal}} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{g' H_1 H_2}{H_1 + H_2}}$$

Notemos que este radio es mucho menor que el externo pues la gravedad reducida es mucho menor que g . Asimismo, notemos que

$$c = \sqrt{\frac{g' H_1 H_2}{H_1 + H_2}} = \sqrt{g' \bar{h}},$$

es la velocidad de propagación de ondas de gravedad internas y es mucho menor que la velocidad de las ondas gravitatorias externas. El $\bar{h} \frac{\Delta \rho}{\rho_0}$ se denomina profundidad equivalente pues es la profundidad tal que un océano de una capa tendría ondas de gravedad con la misma velocidad de fase que el modo baroclínico del sistema de dos capas.

Puesto que las ecuaciones que gobiernan el modo baroclínico son estructuralmente idénticas a las ecuaciones del modo barotrópico las soluciones también lo serán y por lo tanto todas las soluciones de onda que se vió para las ondas barotrópicas en la sección 9.1 pueden ser aplicadas al modo interno con las definiciones apropiadas de gravedad y profundidad. Mientras que el modo barotrópico es uniforme en la vertical, el modo baroclínico tiene transporte vertical nulo y por lo tanto velocidades opuestas en cada capa (figura 9.10).

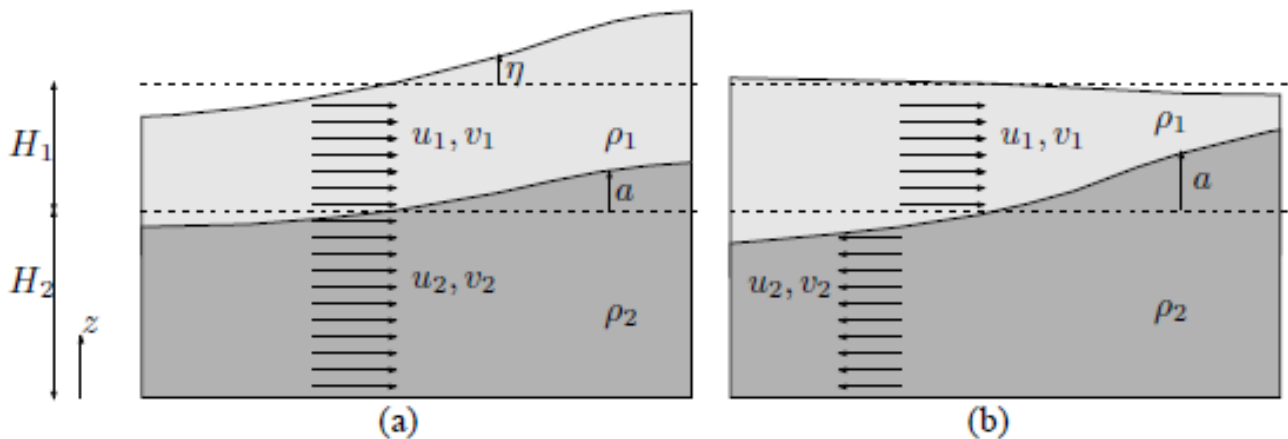


Figura 9.10 – (a) modo barotrópico y (b) modo baroclínico.

Consideremos un océano costero como compuesto de dos capas, una capa superficial de 100 m de profundidad y otra capa inferior de 500m de profundidad. La densidad de la capa superior es 1024 kg/m³ y la de la inferior es 1026 kg/m³. ¿Cual es la velocidad de propagación de las ondas de gravedad interna barotrópica y baroclínica?

La onda barotrópica viaja a una velocidad

$$c = \sqrt{gH} = \sqrt{9.8 * 600} = 77 \text{ m/s}$$

La onda baroclínica viaja a una velocidad

$$c = \sqrt{\frac{g' H_1 H_2}{H_1 + H_2}} = \sqrt{\left(\frac{9.8 * 2}{1025}\right) \frac{100 * 500}{600}} = 1.3 \text{ m/s}$$

La figura 9.11 muestra la propagación de ondas en un modelo de dos capas.

La termoclina separa una capa superficial relativamente somera de una capa profunda, por lo que $H_1/H_2 \ll 1$. Así, para el modo interno se tiene $c = \sqrt{g' H_1}$ donde H_1 es la profundidad de la termoclina. A través de la termoclina generalmente $\Delta\rho/\rho_1 \sim 1\%$, por lo que $g' \sim 0.01g$. Por lo tanto la velocidad de fase de las ondas internas en la termoclina es 100 veces menor que la de las ondas barotrópicas en la superficie. Asimismo, el desplazamiento de la termoclina es mucho mayor que el desplazamiento de la superficie.

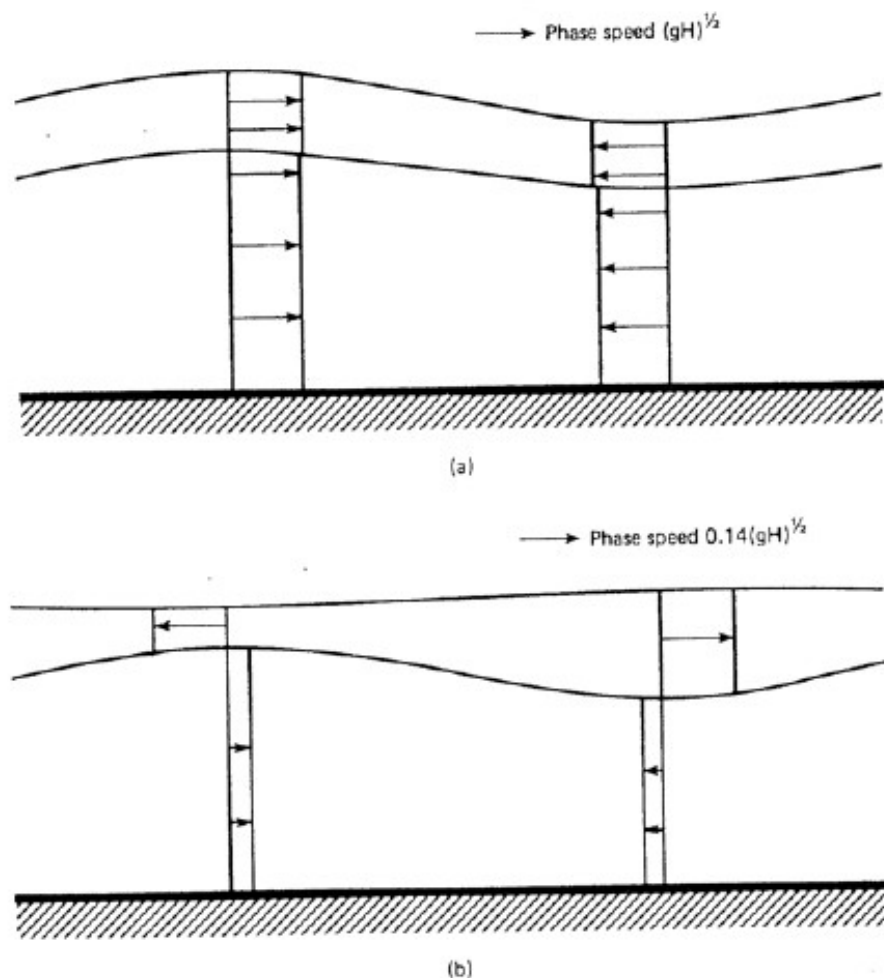


Figura 9.11 – Configuración en un sistema de dos capas de (a) una onda barotrópica, y (b) una onda baroclínica propagándose de izquierda a derecha. En el caso mostrado la capa inferior es tres veces más profunda que la superior y tiene una densidad 10% mayor. Se muestra la dirección del flujo en las crestas y valles y las velocidades relativas de las capas en esos puntos.

El modo barotrópico no tiene gran interés desde un punto de vista climático, excepto para la predicción de tsunamis. Por el contrario el modo baroclínico juega un papel fundamental en la dinámica oceánica en escalas climáticas. Asimismo, el hecho de que el desplazamiento de la interfase sea proporcional al desplazamiento de la superficie es muy útil para inferir el comportamiento oceánico en regiones subsuperficiales a través de datos obtenidos por altimetría.

Los resultados obtenidos están restringidos al caso de ondas lineales. No obstante, dado que en general existe una capa superficial relativamente fina cuya densidad es un poco menor que el océano profundo los resultados se pueden generalizar. En particular, la dinámica de la capa en superficie es esencialmente la dinámica de una capa somera cuya profundidad es igual a la profundidad equivalente. El océano profundo responde pasivamente a este modo con

velocidades muy pequeñas ya que $v_2 = -H_1 v_1 / H_2$. Bajo estas circunstancias la hipótesis de fondo plano no tiene efecto en el resultado.

El número de modos verticales aumenta con el número de capas. Para un modelo de 3 capas hay 3 modos, para un modelo de 4 capas hay 4 modos, etc. Así, en un modelo de 3 capas existen dos modos internos de propagación de ondas y puede ocurrir que si la capa del medio es suficientemente fina, los desplazamientos de las interfaces interactúan dejando pasar energía de un nivel a otro. En el límite de un número infinito de capas se tiene una estratificación continua, el número de modos verticales es infinito, y las ondas se propagan horizontal y verticalmente. El patrón de propagación de ondas es más complejo cuantos mas modos se tienen; no obstante el mecanismo de propagación es siempre el mismo: el juego permanente entre gravedad e inercia.

Bibliografía principal

- Introduction to physical oceanography, J. Knauss.
- Introduction to geophysical fluid dynamics, B. Cushman-Roisin